２８－１５４

平成28年度
ロータダイナミクスの観点に基づく
鉄道車両の振動低減による乗心地向上
補助事業研究報告書

日本大学 理工学部 機械工学科
安藝 雅彦

目次

1. 緒言

1.1. 輪軸不釣合いに伴う蛇行動現象の発生

台車の改良や車両の高速化により，車輪のアンバランスによる車体振動への影響は乗心地上の重要な問題となっている[1]．車輪にアンバランスがあると，車輪が 1 回転ごとに輪軸が前後に微小に振動する．その前後振動が台車に伝わり，さらに車体を前後に振動させる．この前後振動と車体の曲げ固有振動数が一致すると共振を起こし，車体中央部が上下に大きく振動するびびり振動が発生する[2]．乗心地の低下を抑制するために車輪のアンバランス量は製造時に 250 g･m 以下になるように管理されており，新幹線車両においてはアンバランス量 50 g･m 以下が適用されかつ輪軸に組み立てた後の合成アンバランス量の管理も実施されている[2]．このように車輪のアンバランス量が乗心地に影響を与えることから，乗心地を向上させるため，車輪のアンバランスによって発生する振動の解析が行われている[3]-[7]．

一方，輪軸に作用する様々な周期的な変動によって輪軸の運動に係数励振特性が現れることが報告されている[8],[9],[10]．文献(8)や(9)ではレールと車輪の形状，クリープ係数，輪重の時間変動により輪軸に係数励振が発生することが理論的に考察されている．文献(10)では，輪重の周期変動により蛇行動発生速度が低下することが理論的に考察されており，蛇行動現象を自励振動型係数励振系として考えると従来の蛇行動発生速度よりも低速で蛇行動が発生することが述べられている．しかし，文献(10)では輪重変動によって蛇行動発生速度の低下が述べられているものの，実際の車両パラメータを用いた輪軸の質量不釣合いによってこの係数励振項がどのくらい影響するのかという観点までは検討されていない．

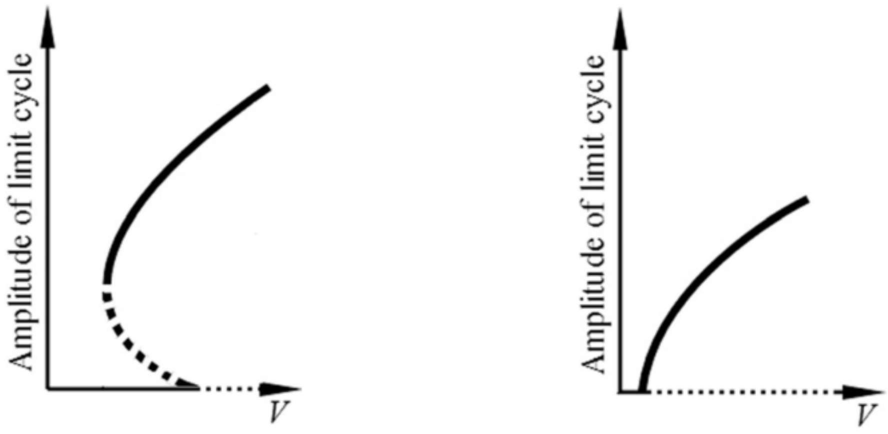
本研究では文献(10)を発展させ，輪軸の質量不釣合いによって生ずる輪重変動によって蛇行動発生速度の低下の程度を評価することを目的とする．本報告書の第 2 章から第 5 章において，下記の研究成果を報告する．係数励振系は係数励振項によって角振動数成分は無数に派生してゆくことが知られている[11]．そこで本報では係数励振項をオーダー評価し，1 次の派生成分のみを考慮することにした．係数励振系の解を仮定し，係数励振系の特性方程式を求めることで理論的に根軌跡を求めた．まず，自励振動型係数励振系である輪重変動を含む 1 軸台車モデルのシミュレーションを実施し，蛇行動振幅を求め，そのシミュレーション結果を FFT 解析することで，この振動には通常の 1 軸台車モデルでは生じない高次の蛇行動周波数成分が含まれることを確認した．その周波数を特性方程式の解より得られた解析結果と比較する．また，特性方程式の解をプロットし根軌跡から蛇行動限界速度への影響を検討する．

1.2. 非線形振動解析による非線形蛇行動の回避

鉄道車両に特有の振動問題に蛇行動がある[12]．蛇行動に関する研究は長く行われており[12]，それらの結果が台車設計に用いられている．これらの研究の多くは線形な範囲に限定

し，線形な運動方程式を元にしたものである．しかし，線形な範囲の運動方程式により得られる安定限界速度は，実際の蛇行動発生速度とは差があることが指摘されている(13)．これを解決するために，クリープ力の非線形性を考慮した研究が行われている(13)(14)(15)．一方，その他の非線形性を考慮した研究も行われており，近年では蛇行動の分岐現象を対象とした研究が行われている(16)(17)(18)(19)(20)(21)．鉄道における蛇行動では，ホップ分岐が生ずることが知られている．したがって，運動方程式に非線形性を考慮すると，リミットサイクルに収束する．鉄道における安定限界速度はホップ分岐点である．線形安定限界近傍における分岐のタイプは，車両のパラメータにより亜臨界ホップ分岐と超臨界ホップ分岐の 2 つに分けられる．文献(20)(21)などの研究では，設計パラメータによって亜臨界ホップ分岐（図 1 (a)）と超臨界ホップ分岐（図 1 (b)）との間で状態が変化することが報告されている．亜臨界ホップ分岐の場合には，蛇行動限界速度未満でも蛇行動振幅解が存在するため，軌道外乱が加わることによって蛇行動が発生する可能性がある（図 2）．この観点からみれば，亜臨界ホップ分岐が発生する設計パラメータよりも超臨界ホップ分岐が発生する設計パラメータを用いることが好ましい．このような観点から，回転機械の分野では，回転機械の設計パラメータを調整することで，亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐になるように設計する手法が検討されている．

本研究では，設計パラメータを調整することによって，蛇行動において亜臨界ホップ分岐の特性がどのように変化するか検討する．本報告書の第 6 章から第 8 章において，下記の研究成果を報告する．まず，一輪軸台車を対象にして非線形項を含む運動方程式(16)(19)を用い，中心多様体理論により，力学系を平衡点の分岐に関するモードのみに低次元化する(16)エラー! 参照元が見つかりません。(22)．次に中心多様体理論を用いた非線形座標変換により，分岐現象を支配する標準形の微分方程式を導出する(16) (22)．この標準形の考察から安定限界近傍で発生するリミットサイクル軌道の大きさにより，台車の設計パラメータの基礎検討を行ったので報告する．



(a) 亜臨界ホップ分岐　　(b) 超臨界ホップ分岐

図 1　ホップ分岐

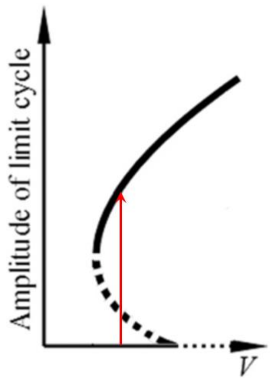


図 2　危険速度未満において外乱による蛇行動の発生

2.1 軸台車モデル

通常の蛇行動解析のための 2 自由度 1 輪軸台車モデル(1)として，

$$m\ddot{y}+\frac{2f_{22}}{v}\dot{y}+\left(\frac{2Q\gamma}{a}+2k_y\right)y-2f_{22}\psi=0 \tag{1}$$

$$I_z\ddot{\psi}+\frac{2a^2f_{11}}{v}\dot{\psi}+\frac{2f_{11}a\gamma}{r}y+2k_xL^2\psi=0 \tag{2}$$

が用いられている（図 1）．ここで，y は輪軸の横変位，ψ は輪軸のヨー角，m は輪軸の質量，I_z は z 軸に関する慣性モーメント，f_{11} と f_{22} は Kalker のクリープ係数，k_x と k_y はそれぞれ進行方向および横方向の軸箱支持ばねのばね定数，$2a$ は平衡位置における左右車輪接触点間隔，$2L$ は支持ばね左右取り付け間隔，Q は輪重，γ は車輪の踏面勾配である．

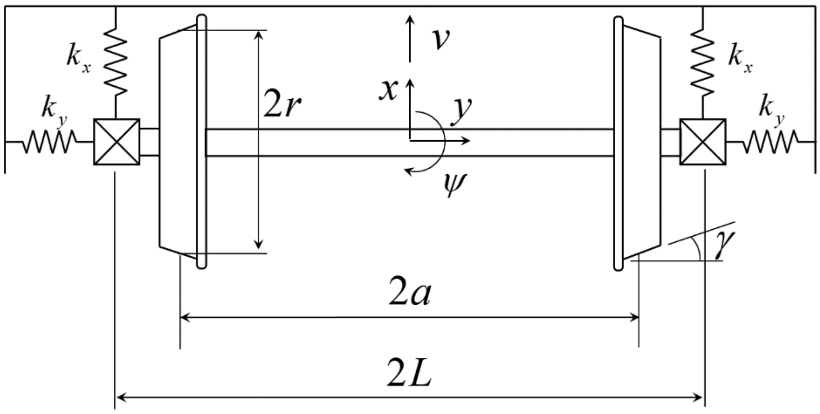


Fig.1 Single wheel bogie model

この運動方程式の解を

$$y = A_y e^{\lambda t} \tag{3}$$

$$\psi = A_\psi e^{\lambda t} \tag{4}$$

と仮定し，これらの運動方程式に代入すると，次の特性方程式を得る．

$$\begin{aligned} & mI_z\lambda^4 + \left(\frac{2f_{11}ma^2}{v} + \frac{2f_{22}I_z}{v}\right)\lambda^3 + \left(2I_zk_y + 2k_xmL^2 + \frac{4a^2f_{11}f_{22}}{v^2} + \frac{2I_zQ\gamma}{a}\right)\lambda^2 \\ & + \left(\frac{4a^2f_{11}k_y}{v} + \frac{4L^2f_{22}k_x}{v} + \frac{4af_{11}Q\gamma}{v}\right)\lambda + 4k_xk_yL^2 + \frac{4k_xL^2Q\gamma}{a} + \frac{4af_{11}f_{22}\gamma}{r} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，各パラメータの値として

$m = 1612\mathrm{kg},\ I_z = 881\mathrm{kgm^2},\ r = 0.46\mathrm{m},\ \gamma = 0.13,$
$2a = 1.435\mathrm{m},\ 2L = 2.0\mathrm{m},\ k_x = k_y = 4.0\,\mathrm{MN/m},\ f_{11} = 13.7\mathrm{MN},\ f_{22} = 11.1\mathrm{MN}$

を用い，$v = 1 \sim 140$ m/s の範囲で特性方程式の根をプロットしたものが図 2 である．このパラメータにおいて，$v = 135.48$ m/s で根が不安定化し，蛇行動が発生することがわかる．

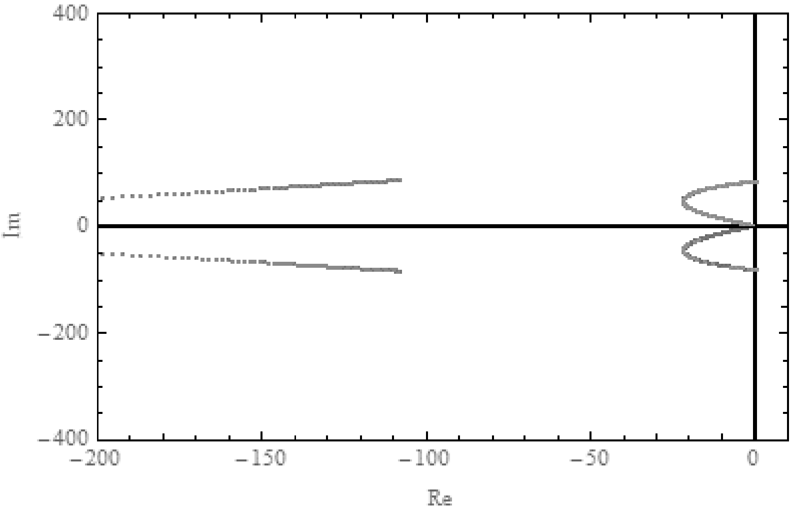


Fig.2 Roots locus of the single wheel bogie model ($me = 250$ gm)

3. 輪軸の質量不釣合いに伴う輪重変動を考慮した 1 軸台車モデル

前節の 1 軸台車モデルに質量不釣合いによる輪重の周期変動を追加する．文献(10)において, 輪重に周期的な変動がある場合が検討されており, 輪重に変動がある場合には Kalker のクリープ係数も輪重の 2/3 乗に比例することが述べられている．これらを踏まえて，輪重変動が輪軸の質量アンバランスによるものとして運動方程式を考慮すると以下のようになる.

$$m\ddot{y} + \frac{2f_{22}(t)}{v}\dot{y} + \left(\frac{2Q(t)\gamma}{a} + 2k_y\right)y - 2f_{22}(t)\psi = 0 \tag{6}$$

$$I_z\ddot{\psi} + \frac{2a^2 f_{11}(t)}{v}\dot{\psi} + \frac{2f_{11}(t)a\gamma}{r}y + 2k_x L^2\psi = 0 \tag{7}$$

ここで,

$$Q(t) = \overline{Q} + me\Omega^2\cos\Omega t = \overline{Q}\left(1 + \frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right) \tag{8}$$

$$f_{ii}(t) = \bar{f}_{ii}\left(1 + \frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}, \quad (i = 1,2) \tag{9}$$

である．なお, 輪軸の角速度 Ω は車速 v と平衡位置におけるレールとの接触点の半径 r によって

$$\Omega = \frac{v}{r} \tag{10}$$

と表される.

式(8)と式(9)を考慮すると運動方程式(6)と(7)は

$$m\ddot{y}+\frac{2\bar{f}_{22}}{v}\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}\dot{y}+\left(\frac{2\left(\overline{Q}+me\Omega^2\cos\Omega t\right)\gamma}{a}+2k_y\right)y-2\bar{f}_{22}\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}\psi=0 \tag{11}$$

$$I_z\ddot{\psi}+\frac{2a^2\bar{f}_{11}}{v}\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}\dot{\psi}+\frac{2\bar{f}_{11}a\gamma}{r}\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}y+2k_xL^2\psi=0 \tag{12}$$

となる．ここで，

$$\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3} \tag{13}$$

の項がこのままでは三角関数の加法定理が使用できないため，簡略化するために，

$$\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}=1+\frac{2}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^2+\frac{4}{81}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^3-\cdots \tag{14}$$

とテイラー展開する．さらに，$v=\Omega/r=140$ m/s のとき，$me\Omega^2/\overline{Q}\cong 0.41$の値となることを踏まえ，

$$\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}<1 \tag{15}$$

と仮定して，テイラー展開の第 2 項までで近似して

$$\left(1+\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)^{2/3}\cong 1+\frac{2}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right) \tag{16}$$

とする．

したがって，

$$m\ddot{y}+\frac{1}{v}\left(2\bar{f}_{22}+\frac{4\bar{f}_{22}}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)\right)\dot{y}+\left(\frac{2\left(\overline{Q}+me\Omega^2\cos\Omega t\right)\gamma}{a}+2k_y\right)y-\left(2\bar{f}_{22}+\frac{4\bar{f}_{22}}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)\right)\psi=0 \tag{17}$$

$$I_z\ddot{\psi}+\frac{1}{v}\left(2a^2\bar{f}_{11}+\frac{4a^2\bar{f}_{11}}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)\right)\dot{\psi}+\frac{1}{r}\left(2\bar{f}_{11}+\frac{4\bar{f}_{11}}{3}\left(\frac{me\Omega^2}{\overline{Q}}\cos\Omega t\right)\right)a\gamma y+2k_xL^2\psi=0 \tag{18}$$

となる．

以降では運動方程式の無次元化を考える．ある代表ばね定数k_yのときの固有角振動数を

$$p_y=\sqrt{\frac{2k_y}{m}} \tag{19}$$

$$p_\psi=\sqrt{\frac{2k_xL^2}{I_z}} \tag{20}$$

とする．また，ある代表長さaを用いて，無次元量

$$
\begin{aligned}
&\hat{y}=\frac{y}{a},\ \hat{t}=p_y t,\ \hat{\omega}=\frac{\omega}{p_y},\ \hat{\Omega}=\frac{\Omega}{p_y},\ \hat{v}=\frac{v}{ap_y},\ \hat{\lambda}=\frac{\lambda}{p_y}\\
&\rightarrow y=a\hat{y},\ t=\frac{\hat{t}}{p_y},\ \omega=p_y\hat{\omega},\ \Omega=p_y\hat{\Omega},\ v=ap_y\hat{v},\quad \lambda=p_y\hat{\lambda}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

を定義する．時間微分に関する項の無次元化は

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d}{d\hat{t}}&=\frac{1}{p_y}\frac{d}{dt}\\
\frac{d^2}{d\hat{t}^2}&=\frac{1}{p_y^2}\frac{d^2}{dt^2}
\end{aligned}\right\}\rightarrow
\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}&=p_y\frac{d}{d\hat{t}}\\
\frac{d^2}{dt^2}&=p_y^2\frac{d^2}{d\hat{t}^2}
\end{aligned}\right\}
\tag{22}
$$

となる．

したがって，無次元化運動方程式は

$$
\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}+\left(\frac{\bar{f}_{22}}{k_y a}\frac{1}{\hat{v}}+\frac{4\bar{f}_{22}}{3\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}}+\left(1+\frac{\overline{Q}\hat{\gamma}}{k_y a}+\frac{2\hat{e}\hat{\gamma}}{\hat{r}^2}\hat{v}^2\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{y}-\left(\frac{\bar{f}_{22}}{k_y a}+\frac{4\bar{f}_{22}}{3\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v}^2\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{\psi}=0
\tag{23}
$$

$$
\frac{d^2\hat{\psi}}{d\hat{t}^2}+\left(\frac{am\bar{f}_{11}}{I_z k_y}\frac{1}{\hat{v}}+\frac{4\bar{f}_{11}ma^2}{3I_z\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\frac{d\hat{\psi}}{d\hat{t}}+\left(\frac{\bar{f}_{11}ma}{I_z k_y}\frac{\hat{\gamma}}{\hat{r}}+\frac{4\bar{f}_{11}ma^2}{3I_z\overline{Q}}\frac{\hat{\gamma}\hat{e}}{\hat{r}^3}\hat{v}^2\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{y}+\frac{mL^2}{I_z}\hat{\psi}=0
\tag{24}
$$

となる．無次元パラメータを整理してまとめると

$$
\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}+\left(\hat{c}_{11}+\hat{c}_{12}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}}+\left(1+\hat{k}_{11}+\hat{k}_{12}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{y}-\left(\hat{k}_{13}+\hat{k}_{14}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{\psi}=0
\tag{25}
$$

$$
\frac{d^2\hat{\psi}}{d\hat{t}^2}+\left(\hat{c}_{21}+\hat{c}_{22}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\frac{d\hat{\psi}}{d\hat{t}}+\left(\hat{k}_{21}+\hat{k}_{22}\cos\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\hat{t}\right)\hat{y}+\hat{k}_{23}\hat{\psi}=0
\tag{26}
$$

と書くことができる．ここで，無次元係数は

$$
\begin{aligned}
&c_{11}=\frac{\bar{f}_{22}}{k_y a}\frac{1}{\hat{v}},\quad \hat{c}_{12}=\frac{4\bar{f}_{22}}{3\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v},\quad \hat{k}_{11}=\frac{\overline{Q}\hat{\gamma}}{k_y a},\quad \hat{k}_{12}=\frac{2\hat{e}\hat{\gamma}}{\hat{r}^2}\hat{v}^2,\quad \hat{k}_{13}=\frac{\bar{f}_{22}}{k_y a},\\
&\hat{k}_{14}=\frac{4\bar{f}_{22}}{3\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v}^2,\quad \hat{c}_{21}=\frac{am\bar{f}_{11}}{I_z k_y}\frac{1}{\hat{v}},\quad \hat{c}_{22}=\frac{4\bar{f}_{11}ma^2}{3I_z\overline{Q}}\frac{\hat{e}}{\hat{r}^2}\hat{v},\\
&\hat{k}_{21}=\frac{\bar{f}_{11}ma}{I_z k_y}\frac{\hat{\gamma}}{\hat{r}},\quad \hat{k}_{22}=\frac{4\bar{f}_{11}ma^2}{3I_z\overline{Q}}\frac{\hat{\gamma}\hat{e}}{\hat{r}^3}\hat{v}^2,\quad \hat{k}_{23}=\frac{mL^2}{I_z}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

とおいた．以降では，簡単のため無次元量を，ハットを省略して表記する．

4. 輪軸の質量不釣合いに伴う輪重変動を考慮した 1 輪軸台車モデルのシミュレーション

輪重変動を考慮した運動方程式(6), (7)を走行速度$v = 138$m/s で初期値としてごく微小な変位を与えた時の横変位とヨー角の時刻歴応答を図 3 に示す．この結果を見ると，単一の周波数での自励振動ではなく複数の周波数が混在している．

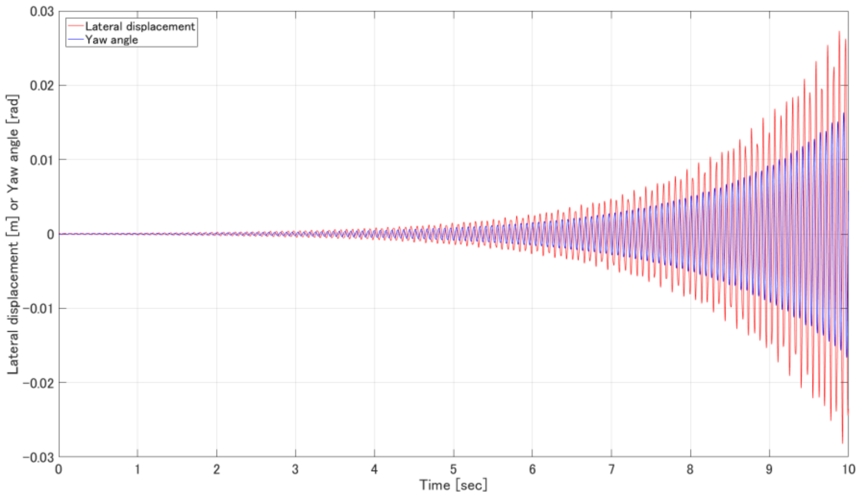


Fig.3 Simulation results of the single axle bogie

そこで，図 3 の横変位の時刻歴データを FFT 解析したものを図 4 に示す．

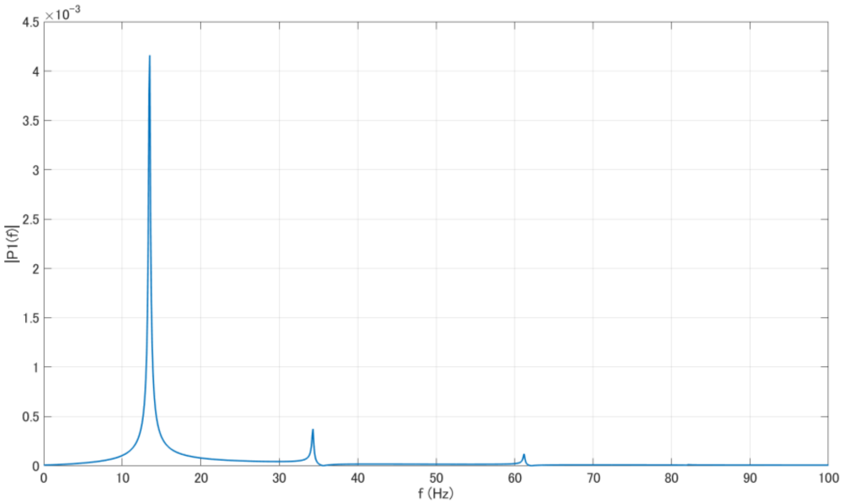


Fig.4 Result of FFT analysis of the lateral displacement

この結果より，13.5Hz, 34.3Hz, 61.2Hz, 82.1Hz に振動成分が存在し，高周波の振動成分になるほどスペクトルの大きさが小さくなっていることがわかる．ここで，13.5Hz は蛇行動本来の振動成分である．

5. 輪軸の質量不釣合いに伴う輪重変動を考慮した 1 輪軸台車モデルの理論解析

運動方程式に解を仮定して代入することで理論解析を行う．例えば解を $y = A_y e^{\lambda t}$ と仮定すると，係数励振項は $\cos\Omega t \cdot A_y \lambda e^{\lambda t} = (1/2)(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \cdot A_y \lambda e^{\lambda t} = A_y \lambda \left(e^{(\lambda+i\Omega)t} + e^{(\lambda-i\Omega)t}\right)/2$ となる．$e^{\lambda t}$ 成分に対して，係数励振項で $e^{(\lambda+i\Omega)t}$ と $e^{(\lambda-i\Omega)t}$ の派生周波数が出てくる．これらの派生成分はさらに別の振動数を派生する．さらに，この派生成分は $\left(1+\left(me\Omega^2/\overline{Q}\right)\cos\Omega t\right)^{2/3}$ のテイラー近似の次数によっても異なるが，今は 1 次近似のみで考えることにする．

ここでは，解を $O(\varepsilon)$ 精度で

$$y = A_y e^{\lambda t} + \varepsilon B_{y1} e^{(\lambda+i\Omega)t} + \varepsilon B_{y2} e^{(\lambda-i\Omega)t} \tag{28}$$

$$\psi = A_\psi e^{\lambda t} + \varepsilon B_{\psi 1} e^{(\lambda+i\Omega)t} + \varepsilon B_{\psi 2} e^{(\lambda-i\Omega)t} \tag{29}$$

と仮定してみる．これら仮定した解を運動方程式に代入し，角振動数の係数を比較すると

$$e^{\lambda t}\left[A_y\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2\right)-A_\psi k_{13}+\frac{1}{2}\varepsilon\left\{-\left(B_{\psi 1}+B_{\psi 2}\right)k_{14}+B_{y1}\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda+i\Omega\right)\right)+B_{y2}\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda-i\Omega\right)\right)\right\}\right]=0 \tag{30}$$

$$e^{(\lambda+i\Omega)t}\left[-\frac{1}{2}A_\psi k_{14}+\frac{1}{2}A_y\left(k_{12}+c_{11}\lambda\right)+\varepsilon\left\{-B_{\psi 1}k_{13}+B_{y1}\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2+ic_{11}\Omega+2i\lambda\Omega-\Omega^2\right)\right\}\right]=0 \tag{31}$$

$$e^{(\lambda-i\Omega)t}\left[-\frac{1}{2}A_\psi k_{14}+\frac{1}{2}A_y\left(k_{12}+c_{11}\lambda\right)+\varepsilon\left\{-B_{\psi 2}k_{13}+B_{y2}\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2-ic_{11}\Omega-2i\lambda\Omega-\Omega^2\right)\right\}\right]=0 \tag{32}$$

$$e^{(\lambda+2i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\left\{-B_{\psi 1}k_{14}+B_{y1}\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda+i\Omega\right)\right)\right\}\right]=0 \tag{33}$$

$$e^{(\lambda-2i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\left\{-B_{\psi 2}k_{14}+B_{y2}\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda-i\Omega\right)\right)\right\}\right]=0 \tag{34}$$

$$e^{\lambda t}\left[A_y k_{21}+A_\psi\left(k_{23}+\lambda\left(c_{21}+\lambda\right)\right)+\frac{1}{2}\varepsilon\left\{B_{y1}k_{22}+B_{y2}k_{22}+c_{22}\left(B_{\psi 1}\lambda+B_{\psi 2}\lambda+iB_{\psi 1}\Omega-iB_{\psi 2}\Omega\right)\right\}\right]=0 \tag{35}$$

$$e^{(\lambda+i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}A_y k_{22}+\frac{1}{2}A_\psi c_{22}\lambda+\varepsilon\left\{B_{y1}k_{21}+B_{\psi 1}k_{23}+B_{\psi 1}c_{21}\lambda+B_{\psi 1}\lambda^2+iB_{\psi 1}c_{21}\Omega+2iB_{\psi 1}\lambda\Omega-B_{\psi 1}\Omega^2\right\}\right]=0 \tag{36}$$

$$e^{(\lambda-i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}A_y k_{22}+\frac{1}{2}A_\psi c_{22}\lambda+\varepsilon\left\{B_{y2}k_{21}+B_{\psi 2}k_{23}+B_{\psi 2}c_{21}\lambda+B_{\psi 2}\lambda^2+iB_{\psi 2}c_{21}\Omega-2iB_{\psi 2}\lambda\Omega-B_{\psi 2}\Omega^2\right\}\right]=0 \tag{37}$$

$$e^{(\lambda+2i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\left\{B_{y1}k_{22}+B_{\psi 1}c_{22}\left(\lambda+i\Omega\right)\right\}\right]=0 \tag{38}$$

$$e^{(\lambda-2i\Omega)t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\left\{B_{y2}k_{22}+B_{\psi 2}c_{22}\left(\lambda-i\Omega\right)\right\}\right]=0 \tag{39}$$

を得る． $e^{\lambda t}$， $e^{(\lambda+i\Omega)t}$， $e^{(\lambda-i\Omega)t}$ の振動数成分を考慮し，整理すると

$$\begin{bmatrix}
1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2 & \frac{1}{2}\varepsilon\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda+i\Omega\right)\right) & \frac{1}{2}\varepsilon\left(k_{12}+c_{12}\left(\lambda-i\Omega\right)\right) & -k_{13} & -\frac{1}{2}\varepsilon k_{14} & -\frac{1}{2}\varepsilon k_{14} \\
\frac{1}{2}\left(k_{12}+c_{11}\lambda\right) & \varepsilon\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2+ic_{11}\Omega+2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & 0 & -\frac{1}{2}k_{14} & -\varepsilon k_{13} & 0 \\
\frac{1}{2}\left(k_{12}+c_{11}\lambda\right) & 0 & \varepsilon\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2-ic_{11}\Omega-2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & -\frac{1}{2}k_{14} & 0 & -\varepsilon k_{13} \\
k_{21} & \frac{1}{2}\varepsilon k_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon k_{22} & \left(k_{23}+\lambda\left(c_{21}+\lambda\right)\right) & \varepsilon\left(\frac{1}{2}c_{22}\lambda+i\frac{1}{2}c_{22}\Omega\right) & \varepsilon\left(\frac{1}{2}c_{22}\lambda-i\frac{1}{2}c_{22}\Omega\right) \\
\frac{1}{2}k_{22} & \varepsilon k_{21} & 0 & \frac{1}{2}c_{22}\lambda & \varepsilon\left(k_{23}+c_{21}\lambda+\lambda^2+ic_{21}\Omega+2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & 0 \\
\frac{1}{2}k_{22} & 0 & \varepsilon k_{21} & \frac{1}{2}c_{22}\lambda & 0 & \varepsilon\left(k_{23}+c_{21}\lambda+\lambda^2+ic_{21}\Omega-2i\lambda\Omega-\Omega^2\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_y \\ B_{y1} \\ B_{y2} \\ A_\psi \\ B_{\psi 1} \\ B_{\psi 2} \end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{40}$$

を得る．振幅が自明解以外の値を持つためには，係数行列の行列式が 0 とならねばならない．したがって，行列式

$$
\begin{vmatrix}
1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2 & \frac{1}{2}\varepsilon\left(k_{12}+c_{12}(\lambda+i\Omega)\right) & \frac{1}{2}\varepsilon\left(k_{12}+c_{12}(\lambda-i\Omega)\right) & -k_{13} & -\frac{1}{2}\varepsilon k_{14} & -\frac{1}{2}\varepsilon k_{14} \\
\frac{1}{2}(k_{12}+c_{11}\lambda) & \varepsilon\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2+ic_{11}\Omega+2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & 0 & -\frac{1}{2}k_{14} & -\varepsilon k_{13} & 0 \\
\frac{1}{2}(k_{12}+c_{11}\lambda) & 0 & \varepsilon\left(1+k_{11}+c_{11}\lambda+\lambda^2-ic_{11}\Omega-2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & -\frac{1}{2}k_{14} & 0 & -\varepsilon k_{13} \\
k_{21} & \frac{1}{2}\varepsilon k_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon k_{22} & \left(k_{23}+\lambda(c_{21}+\lambda)\right) & \varepsilon\left(\frac{1}{2}c_{22}\lambda+i\frac{1}{2}c_{22}\Omega\right) & \varepsilon\left(\frac{1}{2}c_{22}\lambda-i\frac{1}{2}c_{22}\Omega\right) \\
\frac{1}{2}k_{22} & \varepsilon k_{21} & 0 & \frac{1}{2}c_{22}\lambda & \varepsilon\left(k_{23}+c_{21}\lambda+\lambda^2+ic_{21}\Omega+2i\lambda\Omega-\Omega^2\right) & 0 \\
\frac{1}{2}k_{22} & 0 & \varepsilon k_{21} & \frac{1}{2}c_{22}\lambda & 0 & \varepsilon\left(k_{23}+c_{21}\lambda+\lambda^2+ic_{21}\Omega-2i\lambda\Omega-\Omega^2\right)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (41)
$$

を解くと，この系の固有値が得られる．ここで，各パラメータの値として

$$
m=1612\text{kg},\ I_z=881\text{kgm}^2,\ r=0.46\text{m},\ \gamma=0.13,
$$
$$
2a=1.435\text{m},\ 2L=2.0\text{m},\ k_x=k_y=4.0\,\text{MN/m},\ f_{11}=13.7\text{MN},\ f_{22}=11.1\text{MN}
$$

を用い，$v=1\sim140$ m/s の範囲で特性方程式の根をプロットしたものが図 5 である．$v=135.44$ m/s のとき根が（$\lambda-i\Omega$ に対応する成分で）不安定化している．図 2 では $v=135.48$ m/s で根が（λ に対応する成分で）不安定化したことを考慮すると，アンバランス限界以内の質量不釣合いでは係数励振特性が蛇行動限界速度の低下に与える影響は小さいことがわかる．

なお，図 4 の FFT 解析結果で 13.5Hz, 34.3Hz, 61.2Hz, 82.1Hz の振動成分が存在したが，複素平面上の虚軸の値をとると λ に対応する成分が 13.2Hz, $\lambda-i\Omega$ に対応する成分が 33.7Hz, $\lambda+i\Omega$ に対応する成分が 60.1Hz である．

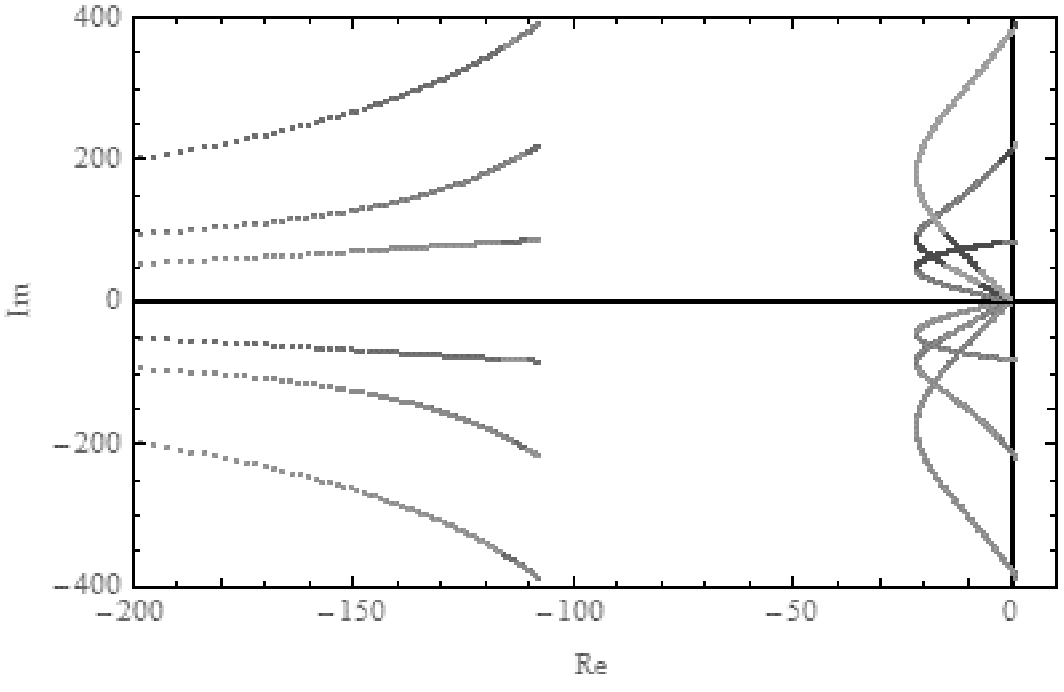


Fig.5 Roots locus of the single wheel bogie model with mass imbalance ($me=250$ gm)

6. 1 輪軸台車の運動方程式

図 3 に示す 1 輪軸台車モデルを用いて検討を行う.

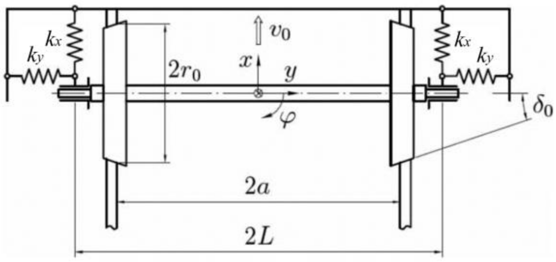


図 3　1 輪軸台車モデル

この車両モデルの運動方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{m}\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}+\frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{v}}\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}}+2\hat{k}_y\hat{y}-2\hat{f}_{22}\psi+\hat{\alpha}_{yyy}\hat{y}^3+\hat{\alpha}_{yy\psi}\hat{y}^2\psi+\hat{\alpha}_{y\psi\psi}\hat{y}\psi^2+\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}\psi^3=0\\
&\hat{I}\frac{d^2\psi}{d\hat{t}^2}+\frac{2\hat{a}^2\hat{f}_{11}}{\hat{v}}\frac{d\psi}{d\hat{t}}+\frac{2\hat{f}_{11}\hat{a}\delta_0}{\hat{r}_0}\hat{y}+2\hat{k}_x\hat{L}^2\psi+\hat{\beta}_{yyy}\hat{y}^3+\hat{\beta}_{yy\psi}\hat{y}^2\psi+\hat{\beta}_{y\psi\psi}\hat{y}\psi^2+\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}\psi^3=0
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

は文献(19)(23)で示された運動方程式を簡略化したもので，非線形項は文献(16)で示されたものを用いた．ここで，各記号の上にハットがついた物理量は有次元であることを表す．$\hat{m}$ は輪軸の質量，$\hat{I}$ は y 軸に関する慣性モーメント，$\hat{f}_{11}$ と $\hat{f}_{22}$ は Kalker のクリープ係数である．$\hat{r}_0$ δ_0 $\hat{a}$ $\hat{L}$ $\hat{k}_x$ $\hat{k}_y$ 各パラメータの値は文献(19)(23)で示された

$$\hat{m}=1612\mathrm{kg},\ \hat{I}=881\mathrm{kgm}^3,\ \hat{r}_0=0.46\mathrm{m},\ \delta_0=0.13,$$
$$2\hat{a}=1.435\mathrm{m},\ 2\hat{L}=2.0\mathrm{m},\ \hat{k}_x=\hat{k}_y=4.0\,\mathrm{MN/m},\ \hat{f}_{11}=13.7\mathrm{MN},\ \hat{f}_{22}=11.1\mathrm{MN}$$

を用い，非線形項の係数 $\hat{\alpha}_{yyy},\hat{\alpha}_{yy\psi},\hat{\alpha}_{y\psi\psi},\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi},\hat{\beta}_{yyy},\hat{\beta}_{yy\psi},\hat{\beta}_{y\psi\psi},\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}$ は，蛇行動限界速度以上のある速度で蛇行動振幅が文献(23)の結果と一致するように値を設定した．

まず，式(42)の運動方程式を無次元化する．基準長さ（軌道間距離とする）を $\hat{a}$，基準時間を $\hat{t}_0$ として，式の関係によって有次元パラメータと無次元パラメータとの関係を作る．

$$\hat{t}=\hat{t}_{st}t,\ \ \hat{y}=\hat{a}y \qquad (43)$$

さらに，時間の基準量 $\hat{t}_{st}$ は，系の固有角振動数 $\hat{\omega}_\varphi$ を用いて $\hat{t}_0\hat{\omega}_\varphi=1$ となるように設定すると，

$$\hat{\omega}=\hat{\omega}_{st}\omega,\ \ \hat{t}_{st}=\frac{1}{\hat{\omega}_{st}},\ \ \hat{v}=\hat{a}\hat{\omega}_{st}v \qquad (44)$$

の関係が得られる. 時間微分も有次元時間 $\hat{t}$ と無次元時間 t との間で次式のように表される.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{t}} &= \frac{1}{\hat{t}_{st}}\frac{d}{dt} \\ \frac{d^2}{d\hat{t}^2} &= \frac{1}{\hat{t}_{st}{}^2}\frac{d^2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

これを代入すると，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hat{a}}{\hat{t}_{st}{}^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\hat{f}_{22}\hat{a}}{\hat{m}\hat{v}\hat{t}_{st}}\frac{dy}{dt} + \frac{2\hat{k}_y\hat{a}}{\hat{m}}y - \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}}\psi + \frac{\hat{\alpha}_{yyy}\hat{a}^3}{\hat{m}}y^3 + \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi}\hat{a}^2}{\hat{m}}y^2\psi + \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}\hat{a}}{\hat{m}}y\psi^2 + \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}}\psi^3 = 0 \\ \frac{1}{\hat{t}_{st}{}^2}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{2\hat{a}^2\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{v}\hat{t}_{st}}\frac{d\psi}{dt} + \frac{2\hat{f}_{11}\hat{a}^2\delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0}y + \frac{2\hat{k}_x\hat{L}^2}{\hat{I}}\psi + \frac{\hat{\beta}_{yyy}\hat{a}^3}{\hat{I}}y^3 + \frac{\hat{\beta}_{yy\psi}\hat{a}^2}{\hat{I}}y^2\psi + \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi}\hat{a}}{\hat{I}}y\psi^2 + \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}}\psi^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

となる．これをさらに $\hat{\omega}_{st}$ と $\hat{v}$ を用いてまとめると

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2}\frac{1}{v}\frac{dy}{dt} + \frac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y - \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2}\psi + \frac{\hat{\alpha}_{yyy}\hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y^3 + \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi}\hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y^2\psi + \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y\psi^2 + \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2}\psi^3 = 0 \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{2\hat{a}\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}\frac{1}{v}\frac{d\psi}{dt} + \frac{2\hat{f}_{11}\hat{a}^2\delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0\hat{\omega}_{st}^2}y + \frac{2\hat{k}_x\hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}\psi + \frac{\hat{\beta}_{yyy}\hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y^3 + \frac{\hat{\beta}_{yy\psi}\hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y^2\psi + \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi}\hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y\psi^2 + \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}\psi^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

となる．

7. 蛇行動の非線形理論解析

7.1. 中心多様体定理による低次元化

運動方程式を状態空間モデルで表す．平衡点からの無次元変位と無次元速度を用い，状態量ベクトルを $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y & \psi & \dot{y} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$ とする．線形部を $\mathbf{AX}$，非線形部を $\mathbf{N}$ とすると，状態方程式は

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{N}(\mathbf{X}, \varepsilon) \tag{48}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}\hat{v}} & 0 & -\frac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}{}^2} & \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}{}^2} \\ 0 & -\frac{2\hat{a}^2\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{v}\hat{\omega}_{st}} & -\frac{2\hat{f}_{11}\hat{a}^2\delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0\hat{\omega}_{st}{}^2} & -\frac{2\hat{k}_x\hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}{}^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ y \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\hat{\alpha}_{yyy}\hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}{}^2}y^3 - \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi}\hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}{}^2}y^2\psi - \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}{}^2}y\psi^2 - \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}{}^2}\psi^3 \\ -\frac{\hat{\beta}_{yyy}\hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}{}^2}y^3 - \frac{\hat{\beta}_{yy\psi}\hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}{}^2}y^2\psi - \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi}\hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}{}^2}y\psi^2 - \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}{}^2}\psi^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

と表される．

$\mathbf{A}$ の固有値の実部が負から正になるときの車両速度を蛇行動限界速度 v_C とする．この v_C が分岐点である．蛇行動限界速度 v_C からの速度変動を $v_c\varepsilon$ とすると，走行速度 v は

$$v = v_c(1 + \varepsilon) \tag{50}$$

と書くことができる．これを式(49)に代入し，線形項と非線形項を分けて記述すると

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{N}'(\mathbf{X}, \varepsilon) \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2}\dfrac{1}{v_c} & 0 & -\dfrac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} & \dfrac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 0 & -\dfrac{2\hat{a}\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}\dfrac{1}{v_c} & -\dfrac{2\hat{f}_{11}\hat{a}^2\delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0\hat{\omega}_{st}^2} & -\dfrac{2\hat{k}_x\hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ y \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2\hat{f}_{22}\varepsilon}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2 v_c(1+\varepsilon)}\dot{y} - \dfrac{\hat{\alpha}_{yyy}\hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y^3 - \dfrac{\hat{\alpha}_{yy\psi}\hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y^2\psi - \dfrac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2}y\psi^2 - \dfrac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{a}\hat{\omega}_{st}^2}\psi^3 \\ \dfrac{2\hat{a}\hat{f}_{11}\varepsilon}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2 v_c(1+\varepsilon)}\dot{\psi} - \dfrac{\hat{\beta}_{yyy}\hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y^3 - \dfrac{\hat{\beta}_{yy\psi}\hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y^2\psi - \dfrac{\hat{\beta}_{y\psi\psi}\hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}y\psi^2 - \dfrac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2}\psi^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

となる．

つぎに，以下の座標変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Z} \tag{53}$$

を考える．ここで，

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \tag{54}$$

である．これを具体的に書くと

$$\left.\begin{aligned} y &= P_{11}q_1 + P_{12}q_2 + P_{13}q_3 + P_{14}q_4 \\ \varphi &= P_{21}q_1 + P_{22}q_2 + P_{23}q_3 + P_{24}q_4 \\ \dot{y} &= P_{31}q_1 + P_{32}q_2 + P_{33}q_3 + P_{34}q_4 \\ \dot{\varphi} &= P_{41}q_1 + P_{42}q_2 + P_{43}q_3 + P_{44}q_4 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

である．

式(53)より，式(52)は次のように

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{N}'(\mathbf{q}, \varepsilon) \tag{56}$$

と表現される．式の両辺に左から $\mathbf{P}^{-1}$ をかけると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}'(\mathbf{q}, \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) \end{aligned} \tag{57}$$

となる．ここで，$\mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) = \left[\mathrm{N}_1'' \quad \mathrm{N}_2'' \quad \mathrm{N}_3'' \quad \mathrm{N}_4''\right]^T$ とすると，

$$\mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) = \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & P_{12}^{-1} & P_{13}^{-1} & P_{14}^{-1} \\ P_{21}^{-1} & P_{22}^{-1} & P_{23}^{-1} & P_{24}^{-1} \\ P_{31}^{-1} & P_{32}^{-1} & P_{33}^{-1} & P_{34}^{-1} \\ P_{41}^{-1} & P_{42}^{-1} & P_{43}^{-1} & P_{44}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1}N_1' + P_{12}^{-1}N_2' \\ P_{21}^{-1}N_1' + P_{22}^{-1}N_2' \\ P_{31}^{-1}N_1' + P_{32}^{-1}N_2' \\ P_{41}^{-1}N_1' + P_{42}^{-1}N_2' \end{bmatrix} \tag{58}$$

のように表現される．

いま，速度の変動分 ε を状態量とみなし，$\dot{\varepsilon} = 0$ を方程式系に加えると

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{59}$$

を得る．ここで，

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\lambda_{1r} & \lambda_{1i} & 0 & 0\\ -\lambda_{1i} & \lambda_{1r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{2r} & \lambda_{2i}\\ 0 & 0 & -\lambda_{2i} & \lambda_{2r}\end{bmatrix} \tag{60}$$

である．なお，分岐点近傍において $\lambda_{1r}=0$ であるので

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & \lambda_{1i} & 0 & 0\\ -\lambda_{1i} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{2r} & \lambda_{2i}\\ 0 & 0 & -\lambda_{2i} & \lambda_{2r}\end{bmatrix} \tag{61}$$

である．これを整理すると，

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\\ \dot{\varepsilon}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{1i}q_2+N_1''\\ -\lambda_{1i}q_1+N_2''\\ \lambda_{3r}q_3+\lambda_{3i}q_4+N_3''\\ -\lambda_{3i}q_3+\lambda_{3r}q_4+N_4''\\ 0\end{bmatrix} \tag{62}$$

となる．

q_3,q_4 は安定部分空位間，q_1,q_2,ε は中心部分空間であるため，q_3,q_4 は q_1,q_2,ε に関する 2 次以上の項のみで構成される式で，以下のように

$$\left.\begin{aligned}q_3&=\chi_{1200}q_1^2+\chi_{1110}q_1q_2+\chi_{1101}q_1\varepsilon+\chi_{1020}q_2^2+\chi_{1011}q_2\varepsilon+\chi_{1002}\varepsilon^2+\cdots\\ q_4&=\chi_{2200}q_1^2+\chi_{2110}q_1q_2+\chi_{2101}q_1\varepsilon+\chi_{2020}q_2^2+\chi_{2011}q_2\varepsilon+\chi_{2002}\varepsilon^2+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

とおける．式(63)を時間微分すると

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_3&=\frac{\partial q_3}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial q_3}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial q_3}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon}\\ \dot{q}_4&=\frac{\partial q_4}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial q_4}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial q_4}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

となる．式(62)と式(64)の $\dot{q}_3,\dot{q}_4$ を等しく置き，q_1,q_2,ε に関するべき係数を比較することで，係数 $\chi_{1200},\chi_{1110},\cdots$ が求まる．これを式に代入することで，中心多様体が求まる．すなわち解軌道は，まず中心多様体上の近傍に急速に落ち込み，その後中心多様体に沿って移動する．

最終的に q_1,q_2,ε からなる低次元化された運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_1&=\lambda_{1i}q_2+N_1''\\ \dot{q}_2&=-\lambda_{1i}q_1+N_2''\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

となる．

7.2. 標準形理論による非線形項の除去

この運動方程式に対して，標準形理論を用いた非線形座標変換を施す．標準形理論とは，適当な非線形座標変換によって非線形力学系を簡単にする（非線形項の数を減らす）ための方法であり，これによって簡略化された力学系を標準形と呼ぶ．この標準形理論により，式を標準形へ導く．

まず，式(65)を対角化する． q_1, q_2 を以下のように座標変換する．

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{66}$$

このとき，式(65)は次式のように

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1''(r_1, r_2, \varepsilon) \\ N_2'''(r_1, r_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \tag{67}$$

と対角化される．

ここで， s_1, s_2, ε に関する 2 次と 3 次からなる関数 h_1, h_2 を用いて非線形座標変換

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= s_1 + h_1(s_1, s_2, \varepsilon) = s_1 + \Gamma_{1200}s_1^2 + \Gamma_{1110}s_1s_2 + \cdots + \Gamma_{1003}\varepsilon^3 \\ r_2 &= s_2 + h_2(s_1, s_2, \varepsilon) = s_2 + \Gamma_{2200}s_1^2 + \Gamma_{2110}s_1s_2 + \cdots + \Gamma_{2003}\varepsilon^3 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

を行い，式(67)を次式のように

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \tag{69}$$

と変換する．ここで，

$$\begin{aligned} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) &= \kappa_{1200}s_1^2 + \kappa_{1110}s_1s_2 + \cdots + \kappa_{1003}\varepsilon^3 \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) &= \kappa_{2200}s_1^2 + \kappa_{2110}s_1s_2 + \cdots + \kappa_{2003}\varepsilon^3 \end{aligned} \tag{70}$$

である．

ここで，できるだけ非線形項 n_1, n_2 が少なくなるような座標変換式を求めることを考える．まず，非線形座標変換式(68)を時間微分すると

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial s_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial s_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \left(\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \right) \tag{71}$$

となる．式(71)に式(69)を代入して整理すると，

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s_1} & \frac{\partial h_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s_1} & \frac{\partial h_2}{\partial s_2} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix}\right) \tag{72}
$$

と表される．

一方，式(67)に座標変換式(68)を代入すると

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 + h_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ s_2 + h_1(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1'''(r_1, r_2, \varepsilon) \\ N_2''''(r_1, r_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \tag{73}
$$

となる．

ここで，式(72)と式(73)を等置し，s_1, s_2, ε に関する各べき係数を比較することで，κ と Γ を関連付ける．ただし，6 次以上の項は無視して考える．

これらの係数を式に代入することで，最終的に標準形は

$$
\left.\begin{aligned} \dot{s}_1 &= i\lambda_{1i}s_1 + \kappa_{1101}s_1\varepsilon + \kappa_{1210}s_1^2 s_2 \\ \dot{s}_2 &= -i\lambda_{1i}s_2 + \kappa_{2011}s_2\varepsilon + \kappa_{2120}s_1 s_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{74}
$$

と表現される．

さらに s_1, s_2 を極座標表示 $s_1 = re^{i\theta}, s_2 = re^{-i\theta}$ で表すと，式は

$$
\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = i\lambda_{1i}re^{i\theta} + \kappa_{1101}\varepsilon re^{i\theta} + \kappa_{1210}r^3 e^{i\theta} \\ \dot{s}_2 &= \dot{r}e^{-i\theta} - ir\dot{\theta}e^{-i\theta} = -i\lambda_{1i}re^{-i\theta} + \kappa_{2011}\varepsilon re^{-i\theta} + \kappa_{2120}s_1 r^3 e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{75}
$$

となる．ここで，s_1, s_2 はそれぞれ前向きの振れまわりと後ろ向きの振れまわりの情報を表しているが，軌道を考察する際には片方だけを用いればよい．そこで式の s_1 のみに着目し，これを実部と虚部に分けると

$$
\left.\begin{aligned} \dot{r} &= \kappa_{1101r}\varepsilon r + \kappa_{1210r}r^3 \\ \dot{\theta} &= \lambda_{1i} + \kappa_{1101i}\varepsilon + \kappa_{1210i}r^2 \end{aligned}\right\} \tag{76}
$$

となる．ただし，$\kappa_{1101} = \kappa_{1101r} + i\kappa_{1101i}$，$\kappa_{1210} = \kappa_{1210r} + i\kappa_{1210i}$ とする．

式(76)はそれぞれリミットサイクルの振幅と位相の時間変化を表しており，不動点は $\dot{r} = 0$ すなわち

$$
0 = \kappa_{1101r}\varepsilon r + \kappa_{1210r}r^3 \tag{77}
$$

を満たす解である．自明な解 $r_t = 0$ に加え，レール／車輪間に作用する非線形力の影響により非自明解が発生し，振幅は

$$r_f = \sqrt{-\frac{\kappa_{1101r}}{\kappa_{1210r}}\varepsilon} \tag{78}$$

となる．この式(78)の κ_{1101r} κ_{1210r} に式を代入することで，リミットサイクルの振幅 r_f の解析的な表現式が導出される．

8. 解析結果

式(78)を用いて設計パラメータを変化させた場合の蛇行動振幅を検討する．
式(78)より，蛇行動振幅 r_f が存在するのは r_f が実数であるときのみであるので，$\kappa_{1101r}/\kappa_{1210r} > 0$ ならば r_f が実数となるのは $\varepsilon < 0$ の時であり，これは亜臨界ホップ分岐である．一方，$\kappa_{1101r}/\kappa_{1210r} < 0$ ならば r_f が実数となるのは $\varepsilon > 0$ の時であり，これは超臨界ホップ分岐である．台車の支持ばね剛性を 1×10^6 N/m から 1×10^9 まで変化させたときの蛇行動振幅を図 4 に示す．この結果より，1×10^6 N/m から 1×10^9 N/m まで変化させても蛇行動振幅は速度変動 $\varepsilon < 0$ のときにのみ生じ，これは亜臨界ホップ分岐であることを示している．このことから，支持ばね剛性を変化させた時には蛇行動限界速度は変化しても亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化することはないことがわかる．

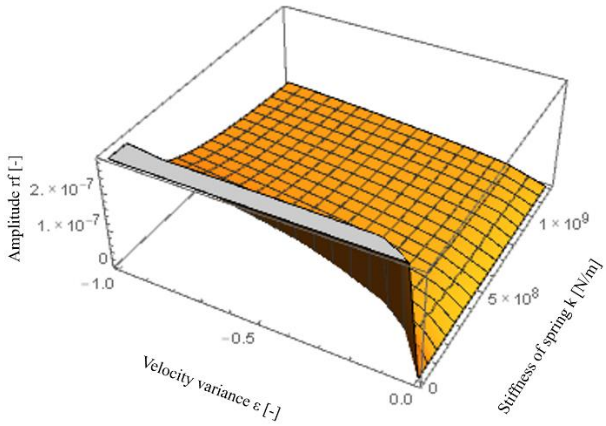


図 4　支持ばね剛性と速度と振幅の関係

9. 結論

9.1. 輪軸不釣合いに伴う蛇行動現象の発生

本研究では，輪軸の質量不釣合いによって生ずる輪重変動によって蛇行動発生速度の低下の程度を評価した．まず，自励振動型係数励振系である輪重変動を含む 1 軸台車モデルの運動方程式を構築した．その運動方程式の係数励振項をオーダー評価し，1 次の派生成分のみを考慮した．その後，係数励振系の解を仮定し，係数励振系の特性方程式を求めることで理論的に根軌跡を求めた．運動方程式のシミュレーションを実施し，蛇行動振幅を求め，そ

のシミュレーション結果を FFT 解析することで，この振動には通常の 1 軸台車モデルでは生じない高次の蛇行動周波数成分が含まれることを確認した．その周波数を特性方程式の解より得られた解析結果と比較するとよく一致しており，輪重変動によって発生する蛇行動振動成分であることが確認された．また，特性方程式の解をプロットし根軌跡を描き，輪軸の質量不釣合いによって発生する輪重変動による不安定根は通常の蛇行動の根と非常に近い速度であり，輪軸の質量不釣合いが 250 g·m 以下であれば蛇行動限界速度の低下を招くことはないことが確認された．

9.2. 非線形振動解析による非線形蛇行動の回避

本研究では，設計パラメータを調整することによって，蛇行動において亜臨界ホップ分岐の特性がどのように変化するか検討した．まず，一輪軸台車を対象にして非線形項を含む運動方程式を用い，中心多様体理論により，力学系を平衡点の分岐に関するモードのみに低次元化した．次に中心多様体理論を用いた非線形座標変換により，分岐現象を支配する標準形の微分方程式を導出し，リミットサイクル軌道の解析式を導出した．その結果，支持ばね剛性を変化させた時には蛇行動限界速度は変化しても亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化することはないことがわかる

10. 参考文献

(1) 日本機械学会，“鉄道車両のダイナミクス 最新の台車テクノロジー”，電気車研究会（1994）

(2) 高速車両用輪軸研究委員会，“鉄道輪軸”，丸善プラネット（2008）

(3) 松井信夫，“輪軸の質量不釣合いによる車両振動の理論解析”，東急車輌技報，Vol.36，No.9 (1983)， pp.2-12.

(4) 山本巌，二本柳忠，児玉邦彦，“鉄道車両における輪軸の質量不釣合いによる乗心地の阻害について”，東急車輌技報，Vol.36，No.9 (1983)，pp.13-25.

(5) 木村悟，小柳志郎，“輪軸の静および動不釣合いが輪軸振動に与える影響”，日本機械学会第 9 回交通・物流部門大会講演論文集，（2000）pp.191-192.

(6) 佐々木浩一，“輪軸不平衡による車体弾性振動のビート現象について”，日本機械学会第 18 回交通・物流部門大会講演論文集，（2009）pp.135-136.

(7) Bogacz, R. and Kurnik, W., “On some rotor-dynamical phenomena of high-speed trains”, Archive of Applied Mechanics, Vol.85, No.9 (2015), pp.1343-1352.

(8) Lieh, J. and Haque, I., “Parametrically Excited Behavior of a Railway Wheelset”, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.110, No.1 (1988), pp.8-17.

(9) Popp, K., “Parametric Excitation of a Wheelset”, ZAMM Z. angew. Math. Mech., Vol.77, Issue. S1 (1997) pp.269-170.

(10) Szabó, Z. and Lóránt, G., “Parametric Excitation of a Single Railway Wheelset”, Vehicle System Dynamics, Vol.33 (2000), pp.49-55.

(11) 石田幸男，井上剛志，“機械振動工学”，培風館 (2008)

(12) 日本機械学会，“鉄道車両のダイナミクス 最新の台車テクノロジー”

(13) 坂本 東男，山本 三幸，“台車振動に及ぼすクリープ力非線形特性の影響”，日本機械学会論文集 C 編， Vol.52,No.473 (1986), pp.302-309.

(14) 横瀬 景司，五十嵐 光男，高柳 次郎，“クリープ力の非線形特性を考慮した台車だ行動に関する基礎的考察”，日本機械学会論文集 C 編，Vol.51，No.466 (1985), pp.1198-1208.

(15) 横瀬 景司，佐渡 達朗，小林 且洋，藤家 正子，“Krylov-Bogoliubov 法を適用した非線形だ行動の一解法”，日本機械学会論文集 C 編，Vol.56，No.531 (1990), pp.2893-2898.

(16) Yabuno, H., Okamoto, T. and Aoshima, N., “Effect of Lateral Linear Stiffness on Nonlinear Characteristics of Hunting Motion of a Railway Wheelset”, Meccanica, Vol. 37, No. 6 (2002), pp. 555-568

(17) G. Lorant, G. and Stepan, G., “The Role of Non-Linearities in the Dynamics of a Single Railway Wheelset”, Machine Vibration, Vol. 5 (1996), pp.18-26

(18) Froment, O., Aubry, D. and Castel, L., “Analysis of the Stability of Nonlinear Railways Dynamics”, Computational Mechanics (1998), pp.1-9.

(19) Wagner, U., “Nonlinear dynamic behaviour of a railway wheelset”, Vehicle System Dynamics, Vol. 47, No. 5 (2009), pp.627-640.

(20) Polach, O. and Kaiser, I., “Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models”, Transactions of the ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.7 (2012), pp.041005-1 - 041005-8.

(21) Wu, X and Chi, M., “Parameters Study of Hopf Bifurcation in Railway Vehicle System”, Transactions of ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.10, No.3 (2015), pp.031012-1 – 031012-10.

(22) 藪野 浩司，“工学のための非線形解析入門 システムのダイナミクスを正しく理解するために”，サイエンス社，(2004).

(23) Popp, K., “Parametric Excitation of a Wheelset”, ZAMM Z. angew. Math. Mech., Vol. 77, (1997), pp. 269-270.