支持剛性に異方性を有するオープンクラックロータの周波数伝達関数
（低次元モデルを用いた検討とスイ—プ加振による検証）

安藝 雅彦（名古屋大学），○牛 憶恂（名古屋大学）， 井上 剛志（名古屋大学），
高木 賢太郎（名古屋大学）， 中本 謙太（名古屋大学）

Frequency Transfer Function of an Open Crack Rotor with an Anisotropic Support Stiffness (Consideration Using the Reduced Oeder Model and Verification with Sweep Excitation)

Masahiko AKI (Nagoya University), ○Yixun NIU (Nagoya University), Tsuyoshi INOUE (Nagoya University), Kentaro TAKAGI (Nagoya University), and Kenta NAKAMOTO (Nagoya University) ,

Abstract:This paper deals with crack detection of an open crack rotor with an anisotropic support stiffness.
The validity of proposed frequency transfer function is verified using numerical simulation of sweep excitation.

１．緒言

クラックの早期検出のため，これまでクラックを有する回転軸の振動特性からクラックを検出しようとする研究が行われてきた [(1)–(8)]．

オープンクラックは一般的に弱い偏平性と見なされその軸振動に与える影響は小さい場合が多く，このとき，クラックによる影響の大きさは，支持剛性の異方性により現れる影響の大きさと同程度のオーダーになる．したがって，オープンクラックの伝達関数を導出するためには，クラックによる偏平性と軸受剛性の異方性の相互作用の影響を考慮する必要性が生じる．このような相互作用の影響を考慮する場合の伝達関数については既報 [(9)] で検討した．

本報では，既報 [(9)] で導出したオープンクラックと支持剛性の異方性の相互作用を考慮したロータ系の伝達関数の妥当性を，シミュレーションにおいてスイープ加振を実施し，加振実験と同じ条件で検証する．

２．運動方程式および周波数伝達関数

質量のない弾性軸にオープンクラックが入った回転軸の中央付近に円板を取り付け，両側を玉軸受で水平支持した系を考える．Fig.1 に理論モデルを示す．加振力は円板に加える．この支持剛性に異方性を有するオープンクラック軸の運動方程式を示す．なお，クラックおよび異方性の影響の大きさを同程度の微小量とし，微小パラメータ ε を用いて，以下のように表す．

$$
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & i_p\omega \\ -i_p\omega & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}
+ \varepsilon\left(\begin{bmatrix} -\Delta k_b & 0 \\ 0 & \Delta k_b \end{bmatrix} + \Delta k_c \begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \tag{1}
$$

ここで，ω は軸の回転角速度であり，m はロータ質量，c はロータの減衰係数，k はロータのばね定数，i_p は円板のジャイロモーメントの寄与を表すパラメータ，f_x と f_y はそれぞれ x 方向と y 方向の外力を表す．Δk_b は軸受の支持剛性に起因するばね定数の異方差，Δk_c はロータのクラックに起因するばね定数の変化量を表す．Table 1 に本論文中で用いるパラメータの値を示す．この値は実験装置を対象として実験的に同定したものである．

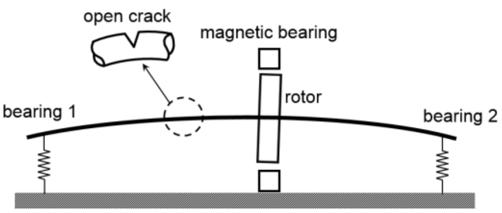

Fig.1 Simple rotor model with an open crack

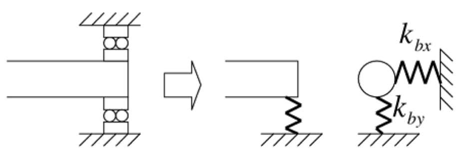

Fig.2 Modeling of the bearing by the linear springs

Table 1 Specifications of the cracked rotor

Rotor mass m (kg)	Shaft damping ratio ζ (-)	Shaft stiffness k (N/m)	Effect of gyroscopic moment i_p (Ns²/m)	Asymmetry of shaft stiffness due to crack Δk_c (N/m)	Directional difference of stiffness due to the anisotropy of support Δk_b (N/m)
3.4	8.4×10^{-4}	1.1×10^{5}	2.0×10^{-5}	$1.1\times10^{-2}k$	$3.6\times10^{-2}k$

系に角振動数 Ω のふれまわり外力が加えられると，オープンクラック（偏平性）と支持剛性の異方性の存在により発生する振動数成分は Fig.3 のようになる [9]．

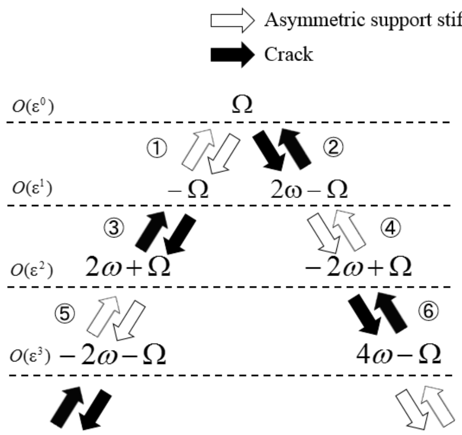

Fig.3 Derivation of the components in the whirling motion generated by the effects of crack and support anisotropy

また，クラックと支持剛性の異方性を介して現れる 5 つのふれまわり振動数の外力を得るように変形することで，以下のような各ふれまわり振動加振力に対する運動方程式を導出した [9]．

$$
\left.
\begin{aligned}
&m\ddot{z} + (c - ji_p\omega)\dot{z} + kz + \varepsilon\Delta k_b\bar{z} + \varepsilon\Delta k_c e^{j2\omega t}\bar{z} = g \\
&m\ddot{\bar{z}} + (c + ji_p\omega)\dot{\bar{z}} + k\bar{z} + \varepsilon\Delta k_b z + \varepsilon\Delta k_c e^{-j2\omega t} z = \bar{g} \\
&me^{j2\omega t}\ddot{\bar{z}} + (c + ji_p\omega)e^{j2\omega t}\dot{\bar{z}} + ke^{j2\omega t}\bar{z} \\
&\qquad\qquad + \varepsilon\Delta k_b e^{j2\omega t} z + \varepsilon\Delta k_c z = e^{j2\omega t}\bar{g} \\
&me^{-j2\omega t}\ddot{z} + (c - ji_p\omega)e^{-j2\omega t}\dot{z} + ke^{-j2\omega t}z + \varepsilon\Delta k_c\bar{z} = e^{-j2\omega t}g \\
&me^{j2\omega t}\ddot{z} + (c - ji_p\omega)e^{j2\omega t}\dot{z} + ke^{j2\omega t}z + \varepsilon\Delta k_b e^{j2\omega t}\bar{z} = e^{j2\omega t}g
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

これらの式を用いて以下のような伝達関数を導出することができる．

$$
\mathbf{D}\begin{Bmatrix} Z_{\Omega}(s) \\ Z_{-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega+\Omega}(s) \\ Z_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{\Omega}(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega-\Omega}(s) \\ G_{2\omega+\Omega}(s) \\ G_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} \tag{3}
$$

ここに係数行列 $\mathbf{D}$ は次式であり，

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \Delta k_b & \Delta k_c & 0 & 0 \\ \Delta k_b & D_2 & 0 & \Delta k_c & 0 \\ \Delta k_c & 0 & D_3 & 0 & \Delta k_b \\ 0 & \Delta k_c & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_b & 0 & D_5 \end{bmatrix} \tag{4}
$$

その成分は

$$
\begin{aligned}
&D_1 = ms^2 + (c - ji_p\omega)s + k \\
&D_2 = ms^2 + (c + ji_p\omega)s + k \\
&D_3 = ms^2 + \{c + j(i_p - 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(i_p - 2m)\omega^2 \\
&D_4 = ms^2 + \{c - j(i_p - 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(-i_p - 2m)\omega^2 \\
&D_5 = ms^2 + \{c - j(i_p + 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(-i_p - 2m)\omega^2
\end{aligned} \tag{5}
$$

である．式(3)の係数行列の逆行列 $\mathbf{D}^{-1}$ を左からかけることにより次の伝達関数を得る．

$$
\begin{Bmatrix} Z_{\Omega}(s) \\ Z_{-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega+\Omega}(s) \\ Z_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & H_{13}(s) & H_{14}(s) & H_{15}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & H_{23}(s) & H_{24}(s) & H_{25}(s) \\ H_{31}(s) & H_{23}(s) & H_{33}(s) & H_{34}(s) & H_{35}(s) \\ H_{41}(s) & H_{24}(s) & H_{34}(s) & H_{44}(s) & H_{45}(s) \\ H_{51}(s) & H_{25}(s) & H_{35}(s) & H_{54}(s) & H_{55}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{\Omega}(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega-\Omega}(s) \\ G_{2\omega+\Omega}(s) \\ G_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\begin{Bmatrix} G_{\Omega}(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega-\Omega}(s) \\ G_{2\omega+\Omega}(s) \\ G_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} \tag{6}
$$

ここでクラック検知のために，共振点ピークの大きさから比較的ピークが大きく検出しやすい伝達関数 H_{13} における $2\omega + p_b$ ピークに着目する． H_{13} は

$$
H_{13} = \frac{D_5\Delta k_c^3 - D_2D_4D_5\Delta k_c}{H_D} \tag{7}
$$

である．ここに，

$$
\begin{aligned}
H_D &= D_4\Delta k_b^4 + D_5\Delta k_c^4 + D_1\Delta k_b^2\Delta k_c^2 \\
&\quad - (D_1D_2D_4 + D_3D_4D_5)\Delta k_b^2 - (D_1D_3D_5 + D_2D_4D_5)\Delta k_c^2 \\
&\quad + D_1D_2D_3D_4D_5
\end{aligned} \tag{8}
$$

である．回転速度 ω =1000rpm の定格運転条件における伝達関数 H_{13} の周波数応答を Fig.4 に示す．

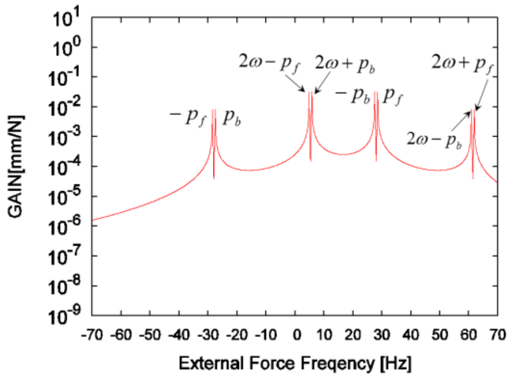

Fig.4 Transfer function H_{13} （ω=1000rpm）

３．スイープ加振による伝達関数の精度検証

本節ではクラック検知に伝達関数を適用することを考え，伝達関数 H_{13} の中で軸受の支持剛性とクラックの相互作用の影響によって現れる $2\omega+p_b$ ピーク近傍に着目する．現実の実験装置のふれまわり加振力の誤差と不釣り合い力を考慮しながら，伝達関数とスイープ加振によるシミュレーションから得られた周波数応答を比較することで，提案する伝達関数の精度を検証する．

実際の実験装置において，加振に使用する磁気軸受の個体差により x，y 方向の加振力の大きさは完全には一致せず，大きさの違いが生じる．また，軸と円板の不釣り合い力が残っていることも考えられる．この二つ実験装置の特性がクラックロータ系に与える影響としてどれだけあるかを調べるため，運動方程式(1)を以下のように修正する．

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & i_p\omega \\ -i_p\omega & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \Delta k_b & 0 \\ 0 & \Delta k_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$
$$+\Delta k_c\begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_x\cos\Omega t \\ f_y\sin\Omega t \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} me\omega^2\cos\omega t \\ me\omega^2\sin\omega t \end{Bmatrix} \tag{9}$$

ここで，x，y 方向の加振力の大きさが $f_y=1.0$ N，$f_x=1.05f_y=1.05$N とする．$me\omega^2\cos\omega t$, $me\omega^2\sin\omega t$ は x，y 方向に加わる不釣り合い力であり，e は偏重心距離を表す．また，不釣り合い力の大きさについては，実験装置において不釣り合い力を除去した際にも，元の不釣りいの十分の一程度が残ったものとしてシミュレーションを行った．

なお, 加振力周波数の範囲について，伝達関数 H_{13} における $2\omega+p_b$ ピーク近傍を考察するため，ふれまわり加振力周波数 $2\omega-\Omega$ を，$2\omega+p_b$ と等しくする必要がある．すなわち，

$$2\omega-\Omega=2\omega+p_b \tag{10}$$

となり, 加振力周波数 $\Omega=-p_b=27.5$Hz となる. また，加振力周波数の範囲を中心の $\Omega=27.5$Hz から前後 2Hz を取る．すると，スイープ加振の加振力周波数範囲は，25.5～29.5Hz である．

加振シミュレーションを行う際に重要なことは，角振動数 Ω のふれまわり外力を加える際に，振動応答には角振動数 Ω による寄与のみならず，角振動数 $-\Omega$，$2\omega-\Omega$，$2\omega+\Omega$，$-2\omega+\Omega$ のふれまわり外力による共振も同時に生ずることである．また，伝達関数 H_{13} に着目するため，それに対応する $2\omega-\Omega$ のふれまわり外力以外の外力による共振が現れないように，外力周波数 Ω の範囲の妥当性を調べなねばならない．

ここで，上記で検討したスイープ加振の周波数範囲 $\Omega=25.5$～29.5Hz において加振し，外力周波数 Ω の範囲の妥当性を調べる．

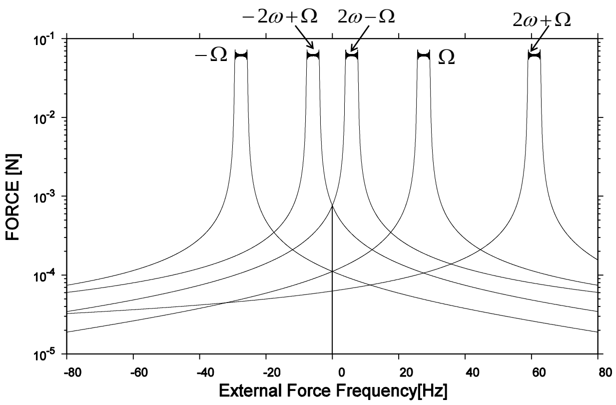

Fig.5 External forces in frequency domain

Fig.5 は周波数 $\Omega=25.5$～29.5Hz のふれまわり外力を加える際に生ずる各ふれまわり外力の大きさを表す．Fig.5 より $2\omega-\Omega$ の加振周波数を使用しても他の外力と混ざらないことが分かる．さらに，伝達関数 H_{13} における $2\omega+p_b$ ピーク近傍を拡大すると，以下の図となる．

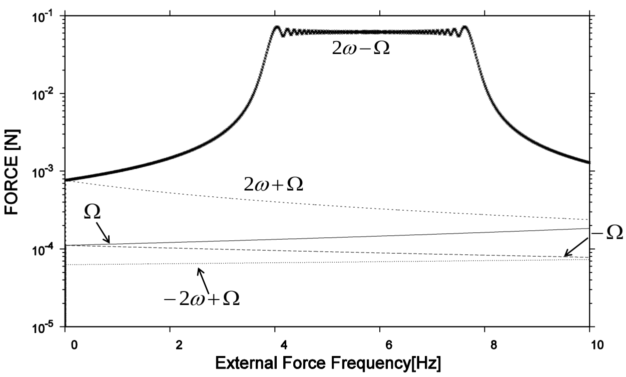

Fig.6 External forces in frequency domain at $2\omega+p_b$ peak

Fig.6 から分かるように，$2\omega+p_b$ ピーク近傍では伝達関数 H_{13} に対応する $2\omega-\Omega$ のふれまわり外力以外の外力の影響は $2\omega-\Omega$ よりずっと小さい．すなわち $2\omega-\Omega$ の加振力のみ作用しているとみなすことができる．

さらに，加振開始および終了の周波数において，加振力が一定の大きさにならず揺らいでいる．そこで，加振力が一定とみなせる範囲を使用するため，25.5Hz の始点を 17.5 Hz まで広げる．すなわち，スイープ加振の周波数範囲は，17.5～29.5Hz となる．また，この 12Hz の範囲を 196.608 秒をかけて，スイープ加振を行っていく．

上記のような入力信号を系に加えると，以下のような x，y 方向の出力信号が得られる．

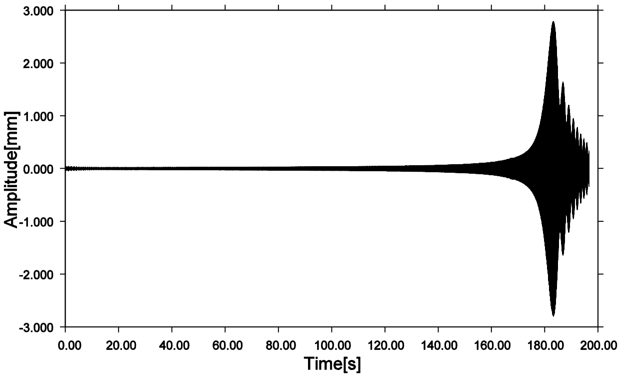

Fig.7 Displacement of the rotor in X-direction

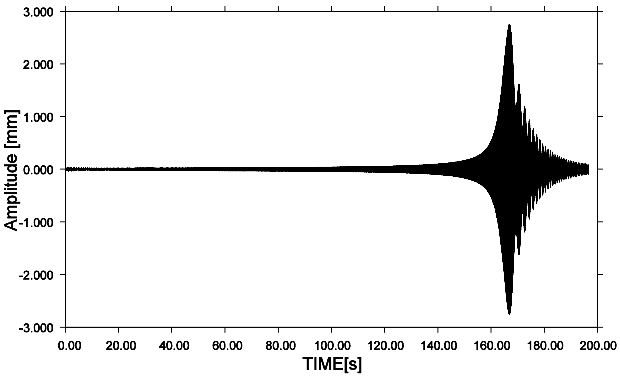

Fig.8 Displacement of the rotor in Y-direction

なお，軸の固有振動数 p_f は 27.5Hz 付近であり，スイープ加振中の 180 秒付近で共振状態となることが見て取れる．また，x，y 方向における共振点発生時間のずれは支持剛性の異方性に起因するものである．

スイープ加振シミュレーションにより得られた H_{13} における $2\omega + p_b$ ピークを，前述の伝達関数により得られた H_{13} における $2\omega + p_b$ ピークと比較する．比較した結果は Fig.9 で示す．

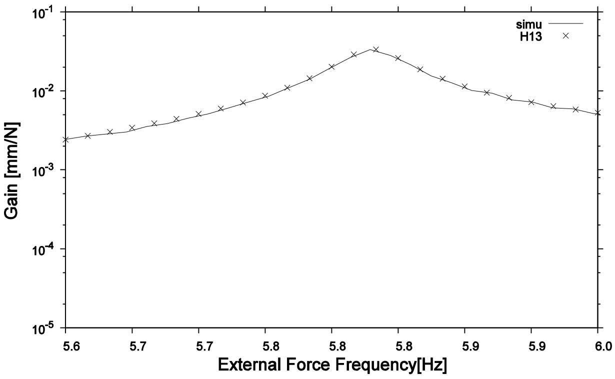

Fig.9 Preparing between sweep excitation simulation result and transfer function
（$2\omega + p_b$ peak in H_{13}）

Fig.9 の結果より，伝達関数により得られた周波数応答とスイープ加振シミュレーションから得られた周波数応答は，クラック検知を実施する $2\omega + p_b$ ピーク近傍において，良好に一致していることが確認できる．

また，支持剛性の異方性がないクラックロータの場合の伝達関数とスイープ加振シミュレーションの比較を Fig.10 に示す．この結果より支持剛性に異方性がない場合は伝達関数に共振点が現れない．

さらに，支持剛性の異方性を有する正常軸の場合は伝達関数 H_{13} は 0 となる．

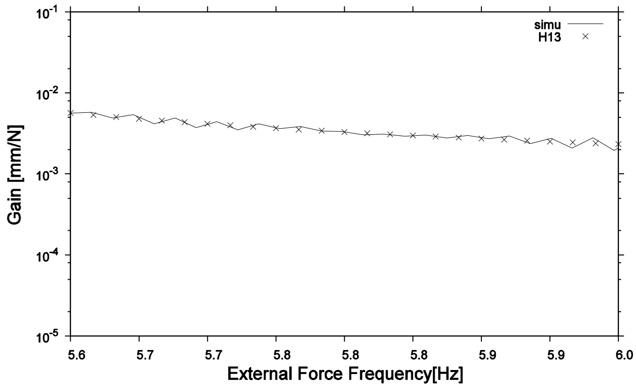

Fig.10 Preparing between sweep excitation simulation result and transfer function without anisotropic support stiffness
（$2\omega + p_b$ peak in H_{13}）

以上のことから，支持剛性に異方性を有する場合でも初期クラック検知の目的において，本報で提案した伝達関数の利用が可能である．

４．結言

本研究では，オープンクラックと軸受剛性の異方性の相互作用を考慮したロータ系のクラック検知のための伝達関数の計算結果と，スイープ加振によるシミュレーションの結果との比較を行うことより，既報 (9) で提案したオープンクラックと軸受剛性の異方性の両方を考慮した伝達関数表現の有効性を示すことができた．今後は，本スイープシミュレーションの条件で加振実験を行い，実験的に本手法の有効性を検証する．

謝辞

本研究はオートレースの補助（27－186）を受けて実施しました．

参考文献

1．J.Wauer, On the dynamics of cracked rotors:A literature survey, *Transaction of the American Society Mechanical Engineers, Applied Mechanics Review,* vol43,pp.13-17, (1990)

2．R.Gasch, A survey of Dynamics Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, *Japan of Sound and*

Vibration, Vol.160, No.2, pp.313-332, (1993)

3. Inagaki,T.,Kanki,H.,Shiraki,K.,Transverse Vibration of a General Cracked Rotor Bearing System, *Transactions of the American society Mechanical Engineers, Jouran of Mechanical Design*, Vol.104, pp.345-355, (1982)

4. I.W.Mayes, and W.G.R.Davies, Analysis of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability, Stress, and Reliability in Design,* vol.108, pp.189-197, (1986)

5. H.D.Nelson and C.Nataraj, The Dynamics of a Rotor System with a Cracked Shaft, Transactions of the American society Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol.108, pp.189-197, (1986)

6. W.G.R.Davies and I.W.Mayes,The Vibrational Behavior of a Multi-shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating transverse Crack, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design,* Vol.106, pp.146-153 (1984)

7. I.Imam, S.H.Azzaro, R.J.Bankert and J.Scheibel, Development of an On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design,* vol.111, pp.241-251 (1989)

8. N.Bachschmid, P.Pennacchi, E.Tanzi and A.Vania, Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems, *Mechanica*, pp.563-582 (2000)

9. 安藝雅彦，牛億恂，井上剛志，高木賢太郎，中本謙太，加藤祥典，クラック検出のための回転軸系の伝達関数表現（支持剛性に異方性を有するオープンクラッククロータの低次元モデルを用いた検討），日本機械学会 Dynamics and Design Conference 講演論文集，USB-memory，(2015)