注意：これは特定の型に対する解法で全ての微分方程式が解けるわけではない．
詳しくは微分方程式の参考書で各自勉強せよ

定係数１階線形非斉次系微分方程式

x(t)の t に関する微分方程式が

$$a\frac{dx}{dt}+bx=f \qquad (f\neq 0)$$

の形(左辺がxに関する項のみ，右辺がそれ以外の項)のとき，この微分方程式を定係数１階線形非斉次系微分方定式という．(f=0 のときは斉次(同時)系)

非斉次系微分方程式の一般解は，「<u>**特殊解** x_p</u> と<u>**斉次系の一般解** x_g</u> の和」によって求まる．

- **特殊解（何らかの条件(初期条件、境界条件など)によって一意的に定まる解）** x_p

例えば十分時間がたった後に一定値に収束するような場合は $t\to\infty$ のとき $\frac{dx}{dt}=0$ となる．

したがって

$$bx_p=f \qquad \therefore x_p=\frac{f}{b}$$

- **斉次系の一般解** x_g

$$a\frac{dx_g}{dt}+bx_g=0$$

定係数(係数が全て定数)の微分方程式は指数関数解

$$x_g=\exp(\lambda t)$$

を持つ．n階の微分方程式では一般解はn個の指数関数解の線形和(足し算)となる．指数関数解を上記の斉次系の微分方程式に代入すると，

$$a\lambda+b=0$$

の関係が得られる．これを特性方程式という．この特性方程式の解は

$$\lambda=-\frac{b}{a}$$

である．したがって，斉次系の一般解は任意定数 A を係数として

$$x_g=A\exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$$

となる．

非斉次系微分方程式の一般解 x

非斉次系微分方程式の一般解は上で求めた特殊解 x_p と斉次系の一般解 x_g の和であるから

$$x_{(t)}=x_p+x_g=\frac{f}{b}+A\exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$$

となる．

最後にこの非斉次系微分方程式の特殊解を求める．特殊解は何らかの条件(初期条件、境界条件など)によって任意定数 A を一意的に定めた解である．例えば初期条件を用いる場合は t＝0 のときの x(t) の値 x(0) から A を求める．

注意：これは特定の型に対する解法で全ての微分方程式が解けるわけではない．
詳しくは微分方程式の参考書で各自勉強せよ

定係数 2 階線形非斉次系微分方程式

x(t)の t に関する微分方程式が

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=f \qquad (f\neq 0)$$

の形(左辺がxに関する項のみ，右辺がそれ以外の項)のとき，この微分方程式を定係数 1 階線形非斉次系微分方定式という．(f=0 のときは斉次(同時)系)

非斉次系微分方程式の一般解は，「**特殊解** x_p と**斉次系の一般解** x_g の和」によって求まる．

- **特殊解(何らかの条件(初期条件、境界条件など)によって一意的に定まる解)** x_p

例えば十分時間がたった後に一定値に収束するような場合は $t\to\infty$ のとき $\frac{dx}{dt}=0$，$\frac{d^2x}{dt^2}=0$ となる．したがって

$$cx_p=f \qquad \therefore x_p=\frac{f}{c}$$

- **斉次系の一般解** x_g

$$a\frac{d^2x_g}{dt^2}+b\frac{dx_g}{dt}+cx_g=0$$

定係数(係数が全て定数)の微分方程式は指数関数解

$$x_g=\exp(\lambda t)$$

を持つ．n階の微分方程式では一般解はn個の指数関数解の線形和(足し算)となる．指数関数解を上記の斉次系の微分方程式に代入すると，

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

の関係が得られる．これを特性方程式という．この特性方程式の解は

(ｉ)2 つの実数解　$\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii)重解　$\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{b}{2a}=\alpha$

(iii)2 つの複素数解　$\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-b\pm j\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$　(j は虚数単位 $=\sqrt{-1}$)

の 3 つの場合がある．したがって，斉次系の一般解は任意定数A，Bを係数として

・(ｉ)，(iii) 2 つの実数解または 2 つの複素数解の場合

$$x_g=A\exp(\lambda_1 t)+B\exp(\lambda_2 t)$$

・(ii) 重解の場合 （詳しくは微分方程式の参考書で調べよ）

$$x_g=A\exp(\alpha t)+Bt\exp(\alpha t)$$

となる．

注意：これは特定の型に対する解法で全ての微分方程式が解けるわけではない．
詳しくは微分方程式の参考書で各自勉強せよ

非斉次系微分方程式の一般解　x

非斉次系微分方程式の一般解は上で求めた特殊解 x_p と斉次系の一般解 x_g の和であるから，2 つの複素数解の場合

$$x_{(t)} = x_p + x_g = \frac{f}{c} + A\exp(\lambda_1 t) + B\exp(\lambda_2 t)$$

$$= \frac{f}{c} + A\exp\left\{\left(\frac{-b}{2a} + j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)t\right\} + B\exp\left\{\left(\frac{-b}{2a} - j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)t\right\}$$

$$= \frac{f}{c} + A\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\exp\left(j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + B\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)$$

ここで，オイラーの公式

$$\exp(j\omega t) = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$\exp(-j\omega t) = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

を用いると，

$$x_{(t)} = \frac{f}{c} + A\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\exp\left(j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + B\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\exp\left(-j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)$$

$$= \frac{f}{c} + A\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + j\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right\} + B\exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) - j\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right\}$$

$$= \frac{f}{c} + \exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\left\{(A+B)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + j(A-B)\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right\}$$

となる．ここで，A+B=α，j(A+B)=β と置き直すと

$$x_{(t)} = \frac{f}{c} + \exp\left(\frac{-b}{2a}t\right)\cdot\left\{\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right\}$$

と斉次系の一般解が得られる．

最後にこの非斉次系微分方程式の特殊解を求める．特殊解は何らかの条件(初期条件、境界条件など)によって任意定数 A を一意的に定めた解である．例えば初期条件を用いる場合はt＝0 のときのx(t)および dx(t)/dt の値x(0)，dx(0)/dt からA，Bを求める．