

平成 27 年度

回転軸系のオンラインクラック検知のための  
伝達関数表現の構築  
研究報告書

名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻

安藝 雅彦

牛 憶恂

井上 剛志

高木 賢太郎

# 目次

1. 諸言 .....	3
2. 運動方程式 .....	5
3. 発生する振動成分 .....	7
4. 固有振動数の解析 .....	9
5. 周波数伝達関数の構築 .....	12
5・2 各角振動数のふれまわり加振力に対する運動方程式 .....	12
5・2・1 角振動数 $\Omega$ の加振力に関する式 .....	12
5・2・2 角振動数 $-\Omega$ の加振力に関する式 .....	13
5・2・3 角振動数 $2\omega - \Omega$ の加振力に関する式 .....	13
5・2・4 角振動数 $2\omega + \Omega$ の加振力に関する式 .....	14
5・2・5 角振動数 $-2\omega + \Omega$ の加振力に関する式 .....	14
5・3 伝達関数の導出 .....	14
6. 伝達関数を用いた周波数応答の計算 .....	17
6・1 等方性の支持特性を有する正常軸の場合 .....	17
6・2 支持剛性に異方性を有する正常軸の場合 .....	17
6・3 剛性に等方性を有する軸受に支持されたクラック軸の場合 .....	18
6・4 剛性に異方性を有する軸受に支持されたクラック軸の場合 .....	19
7. 伝達関数の精度検証 .....	22
7・1 伝達関数とシミュレーションから得られた周波数応答の比較 .....	22
7・2 クラック深さの影響 ( $\Delta k_c = 0.5 \times 10^{-2} k$ とした場合) .....	22
8. 結言 .....	24
文献 .....	25

## 1. 諸言

回転機械を長期間稼働させると、回転軸に作用する繰返し応力による金属疲労により、回転軸にクラックが発生する場合がある。回転軸にクラックが発生すると、最初のごく小さいものでも疲労により徐々に進行し、発見が遅ければ軸は破断し重大な事故につながる可能性がある。そのため、クラックをいち早く検出することが重要である(豊田, 1991)。

クラックの早期検出のため、これまでクラックを有する回転軸の振動特性からクラックを検出しようとする研究が行われてきた (Wauer, 1990) (Gasch, 1993) (Inagaki, et al., 1982) (Mayes, et al., 1986) (Nelson, et al., 1986) (Davies, et al., 1984) (Imam, et al., 1989) Bahschmid (Bachschmid, et al., 2000) . Bahschmid らは、クラックの位置や深さを検出する方法を提案した(Bachschmid, et al., 2000). 著者らは、クラック検知のためにオープンクラック軸の簡易かつ定量的解析が可能なモデルを用いた解析を実施し (永田他, 2012a) (永田他, 2012b) , クラックに起因する副共振を利用することでクラックの発生位置を予測するクラック検知法を提案した (永田他, 2013) . さらに、近年ではマルチボディダイナミクス (MBD) を用いた詳細な動的モデルを元にブリージングクラックを対象にした研究 (Kulesza, et al., 2012) (Liong, et al., 2013) も行われ始めている。

ロータダイナミクスの研究分野に、様々なロータ系の伝達関数表現の導出がある。Lee は、偏平性を有する等方性支持のロータモデルおよび支持剛性に異方性を持つ円形断面のロータモデルを用い、それらの伝達関数(Lee, 1991) (Lee, 1993) を導出している。そして、この伝達関数を用いて得られた計算結果と実験との比較によりその妥当性を確認している (Lee, 1997) (Lee, et al., 1993a) (Lee, et al., 1994b) . さらに Lee らは、大きな偏平性とわずかな支持剛性の異方性の双方を有するロータ系に対して、支持剛性の異方性と軸の偏平性が互いに相互作用を及ぼさないという仮定をおき、単純ロータモデルを用いた伝達関数の導出を行い、実験により異方性と偏平性の双方のパラメータ同定 (Seo, et al., 2005) を行っている。さらに偏平性を有する軸部分の位置検出も行っている (Seo, et al., 2009) . オープンクラックは弱い偏平性とみなすことができるので、この伝達関数を導出して活用すれば計算に数値積分を用いる必要が無く計算負荷を低減できることから、クラック検知にも有効な手法であるといえる。

しかし Lee らが導出したこれらの伝達関数(Seo, et al., 2005) (Seo, et al., 2009) においては、「支持剛性の異方性と軸の偏平性が互いに相互作用を及ぼさない」という仮定がなされているが、この仮定は支持剛性が等方性に近く軸の偏平性の影響が支持剛性の異方性の影響に比べて主要である場合に成立するものである。オープンクラックは一般的に弱い偏平性で見なされその軸振動に与える影響は小さい場合が多く、このとき、クラックによる影響の大きさは、支持剛性の異方性により現れる影響の大きさと同程度のオーダーになる。したがって、オープンクラックの伝達関数を導出するためには、クラックによる偏平性と軸受剛性の異方性の相互作用の影響を考慮する必要性が生じる。このような相互作用の影響を

考慮する場合の伝達関数については未だ検討されていない。

本報では、クラックおよび軸受剛性の異方性により派生する高次の微小項をオーダー評価し、オープンクラックと支持剛性の異方性の相互作用を考慮したロータ系の伝達関数を導出する。そして導出した伝達関数を用い、オープンクラックと軸受剛性の異方性の相互作用により発生する共振現象の特性を明らかにする。

## 2. 運動方程式

質量のない弾性軸にオープンクラックが入った回転軸の中央付近に円板を取り付け、両側を玉軸受で水平支持した系を考える. Fig. 1 に理論モデルを示す. 加振力は円板に加える. この支持剛性に異方性を有するオープンクラック軸の運動方程式を示す.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & i_p \omega \\ -i_p \omega & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta k_b & 0 \\ 0 & \Delta k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ + \Delta k_c \begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\omega$  は軸の角速度であり、 $m$  はロータ質量、 $c$  はロータの減衰係数、 $k$  はロータのばね定数、 $i_p$  は円板のジャイロモーメントの寄与を表すパラメータ、 $f_x$  と  $f_y$  はそれぞれ  $x$  方向と  $y$  方向の外力を表す.  $\Delta k_b$  は軸受の支持剛性に起因するばね定数の異方差、 $\Delta k_c$  はロータのクラックに起因するばね定数の変化量を表す. Table 1 に本論文中で用いるパラメータの値を示す. この値は後述の実験装置を対象として実験的に同定したものである.

以降の解析でオーダー評価を行うため、クラックおよび異方性の影響の大きさを同程度の微小量とし、微小パラメータ  $\varepsilon$  を用いて、以下のように表す.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & i_p \omega \\ -i_p \omega & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ + \varepsilon \left( \begin{bmatrix} \Delta k_b & 0 \\ 0 & -\Delta k_b \end{bmatrix} + \Delta k_c \begin{bmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

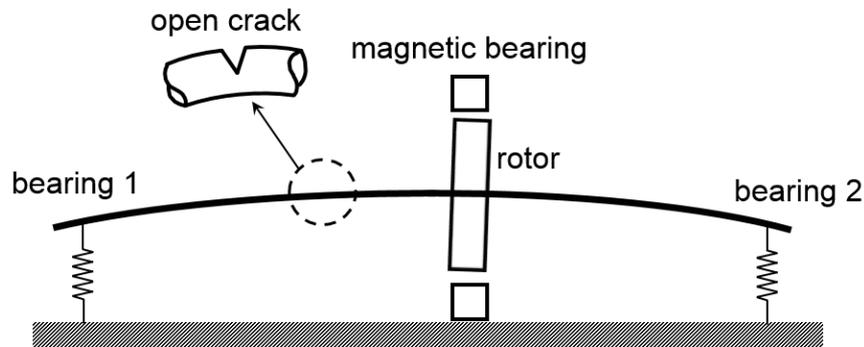


Fig. 1 Simple rotor model with an open crack

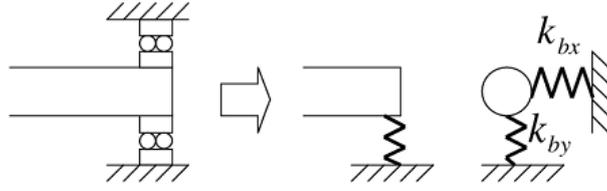


Fig. 2 Modeling of the bearing by the linear springs

Table 1 Specifications of the cracked rotor

Rotor mass $m$ (kg)	Shaft damping ratio $\zeta$ (-)	Shaft stiffness $k$ (N/m)	Effect of gyroscopic moment $i_p$ (Ns <sup>2</sup> /m)
3.4	$8.4 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^5$	$2.0 \times 10^{-5}$
Asymmetry of shaft stiffness due to crack		Directional difference of stiffness due to the anisotropy of support	
$\Delta k_c$ (N/m)		$\Delta k_b$ (N/m)	
$1.1 \times 10^{-2} k$		$3.6 \times 10^{-2} k$	

### 3. 発生する振動成分

オープンクラック（偏平性）と支持剛性の異方性が存在すると、外力の振動数成分から、クラックの影響を介して生ずる振動数および異方性の影響を介して生ずる振動数が現れ、これらの相互作用により派生する振動数は閉じることなく無限に派生してゆくことが知られている(池田他, 1993). このことを考慮し、支持剛性に異方性を有するクラックロータの伝達関数を考えるために、回転角速度  $\omega$  で回転するクラックロータ系に角振動数  $\Omega$  のふれまわり外力を加えた際の入出力関係をまず考える. ここで軸の角速度  $\omega$  と同方向の角速度  $\Omega$  を正とする.

系に角振動数  $\Omega$  のふれまわり外力が加えられると、まず Fig. 3 のように角振動数  $\Omega$  のふれまわり運動が得られる. この角振動数  $\Omega$  のふれまわり外力の大きさが  $\varepsilon^0$  のオーダーであるとき、 $\Omega$  のふれまわり運動は  $\varepsilon^0$  の大きさで現れ、これを  $O(\varepsilon^0)$  と表すこととする. つぎに、角振動数  $\Omega$  のふれまわり運動から軸受剛性の異方性を介して  $-\Omega$  のふれまわり運動が得られ (図中①), クラックを介して  $2\omega - \Omega$  のふれまわり運動が得られる (図中②) (山本他, 2001). これらの成分は、軸受剛性の異方性を介する影響およびクラックを介する影響が微小量  $\varepsilon$  の項であることから  $O(\varepsilon^1)$  の大きさとなる. つぎに  $-\Omega$  のふれまわり運動からクラックを介して  $2\omega + \Omega$  のふれまわり運動が得られ (図中③),  $2\omega - \Omega$  のふれまわり運動から異方性を介して  $-2\omega + \Omega$  のふれまわり運動が得られる (図中④). これらの成分は、同様の考え方から  $O(\varepsilon^2)$  の大きさとなる. さらに同様に異方性およびクラックを介して  $O(\varepsilon^3)$  の大きさの成分  $-2\omega - \Omega$ ,  $4\omega - \Omega$  のふれまわり運動が得られ (図中⑤および⑥), それ以降も異方性およびクラックを介して多くのふれまわり運動成分が得られる.

本論文では、支持剛性の異方性とオープンクラックの相乗効果で現れるふれまわり運動成分に着目した伝達関数の導出を行う. 式(2)を用いた数値シミュレーションによる予備検討結果の観察から、Fig. 3 で示す  $O(\varepsilon^2)$  よりも高次の微小量として現れるふれまわり運動成分から現れる共振ピークは非常に小さいことが確認されたので、本論文では  $O(\varepsilon^2)$  よりも高次の成分は無視して考えることとする. 上記の考察より、 $\Omega$  のふれまわり外力を加えた場合には  $O(\varepsilon^2)$  精度で 5 種類のふれまわり運動成分が現れる. このときの各ふれまわり運動成分の大きさのオーダーを Table 2 に示す.

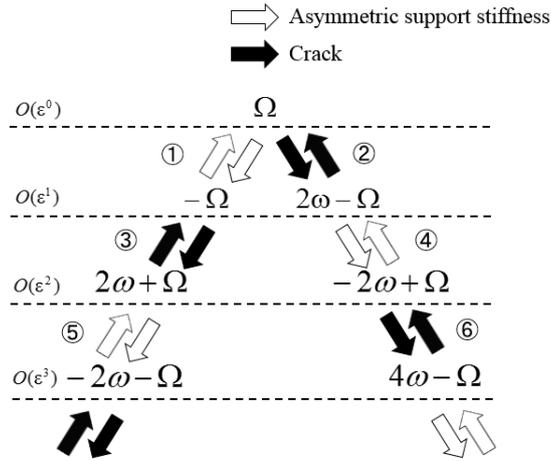


Fig. 3 Derivation of the components in the whirling motion generated by the effects of crack and support anisotropy

Table 2 Order of the each component in the whirling motion

	Frequencies of the whirling motion				
	$\Omega$	$-\Omega$	$2\omega - \Omega$	$2\omega + \Omega$	$-2\omega + \Omega$
Order	$o(\varepsilon^0)$	$o(\varepsilon^1)$	$o(\varepsilon^1)$	$o(\varepsilon^2)$	$o(\varepsilon^2)$

#### 4. 固有振動数の解析

支持剛性の異方性を有するクラックロータ系の固有振動数解析を行うため、運動方程式(2)の自由振動解を $O(\varepsilon^2)$ 精度で以下のように仮定する。

$$\begin{cases} x = A_p \cos pt + \varepsilon A_{-p} \cos(-p)t + \varepsilon A_{2\omega-p} \cos(2\omega-p)t \\ \quad + \varepsilon^2 A_{2\omega+p} \cos(2\omega+p)t + \varepsilon^2 A_{-2\omega+p} \cos(-(2\omega-p))t \\ y = A_p \sin pt + \varepsilon A_{-p} \sin(-p)t + \varepsilon A_{2\omega-p} \sin(2\omega-p)t \\ \quad + \varepsilon^2 A_{2\omega+p} \sin(2\omega+p)t + \varepsilon^2 A_{-2\omega+p} \sin(-(2\omega-p))t \end{cases} \quad (3)$$

ここで、ふれまわり成分 $p, -p, 2\omega-p, 2\omega+p, -(2\omega-p)$ の振幅をそれぞれ $A_p, A_{-p}, A_{2\omega-p}, A_{2\omega+p}, A_{-2\omega+p}$ とする。さらに、クラックもしくは異方性を1回介して生じるふれまわり運動成分 $-p, 2\omega-p$ に対応する振幅 $A_{-p}, A_{2\omega-p}$ には $\varepsilon$ を、クラックと異方性をそれぞれ1回ずつ介して生じるふれまわり運動成分 $2\omega+p, -(2\omega-p)$ に対応する振幅 $A_{2\omega+p}, A_{-2\omega+p}$ には $\varepsilon^2$ をつけて振幅のオーダーを表現する。

式(3)を式(2)に代入し、 $\cos pt, \cos(2\omega-p)t, \cos(2\omega+p)t, \sin pt, \sin(2\omega-p)t, \sin(2\omega+p)t$ の係数についてそれぞれ、 $A_p, A_{-p}, A_{2\omega-p}, A_{2\omega+p}, A_{-2\omega+p}$ について $O(\varepsilon^2)$ 精度で整理すると、解析式を次のように得る。

$$\begin{bmatrix} -mp^2 + i_p \omega p + k + \varepsilon \Delta k_b & \varepsilon \{-mp^2 - i_p \omega p + k + \varepsilon \Delta k_b\} & \varepsilon^2 \Delta k_c & 0 & 0 \\ \varepsilon \Delta k_c & 0 & \varepsilon \{-m(2\omega-p)^2 + i_p \omega(2\omega-p) + k + \varepsilon \Delta k_b\} & \varepsilon^2 \Delta k_c & 0 \\ -mp^2 + i_p \omega p + k - \varepsilon \Delta k_b & \varepsilon \{mp^2 + i_p \omega p - (k - \varepsilon \Delta k_b)\} & \varepsilon^2 \Delta k_c & \varepsilon \{-m(2\omega-p)^2 + i_p \omega(2\omega-p) + k - \varepsilon \Delta k_b\} & 0 \\ \varepsilon \Delta k_c & 0 & \varepsilon^2 \Delta k_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \Delta k_c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p \\ A_{-p} \\ A_{2\omega-p} \\ A_{2\omega+p} \\ A_{-2\omega+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

この式を $\omega$ をパラメータとして解き、固有角振動数 $p$ を計算する。Table 1に示したパラメータを用い、各回転速度における固有角振動数 $p$ を計算した結果をFig. 4に示す。

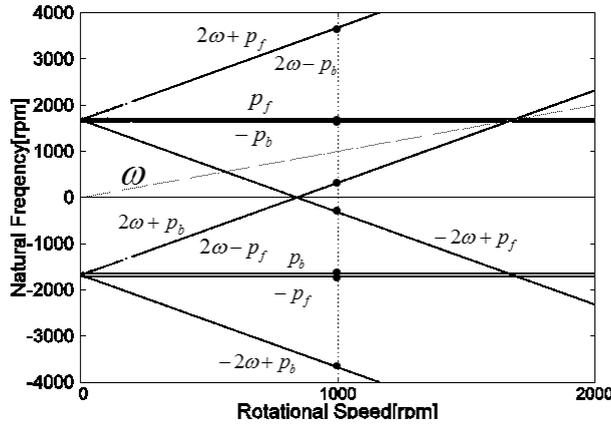


Fig. 4 Natural frequency diagram

Fig. 4 は各回転速度に対する固有振動数の変化を示しており、図中には 10 個の固有振動数が示されている． 考察のために，等方性支持の正常軸の場合の振動数方程式  $-mp^2 + i_p \omega p + k = 0$  の根である固有振動数を  $p_f$ ，  $p_b$  ( $p_f > 0$  は前向きふれまわり運動の固有振動数，  $p_b < 0$  は後向きふれまわり運動の固有振動数) と表す． この表記を用いると，図中の固有振動数はそれぞれおおむね  $p_f$ ，  $p_b$ ，  $-p_f$ ，  $-p_b$ ，  $-2\omega + p_b$ ，  $-2\omega + p_f$ ，  $2\omega - p_f$ ，  $2\omega + p_b$ ，  $2\omega - p_b$ ，  $2\omega + p_f$  で特性づけることができる． ここで，  $-p_f$  と  $-p_b$  は支持剛性の異方性により，  $2\omega - p_f$  と  $2\omega - p_b$  はオープンクラックにより，そして  $-2\omega + p_b$ ，  $-2\omega + p_f$ ，  $2\omega + p_b$ ，  $2\omega + p_f$  はクラックと支持剛性の異方性の相互作用によって生じる． さらに，図中に回転速度を線  $\omega$  で追加して示す．

上記で得た高次微小量の打ち切りによる固有振動数解析結果の妥当性を確認するために，  $\omega = 1000 \text{ rpm}$  で式(2)の数値シミュレーションにより得られた共振曲線と解析により得られた Fig. 4 の固有振動数線図を比較したものを Fig. 5 に示す． 図より，共振曲線のピーク周波数と固有振動数線図における共振周波数の位置はおおむね良好に一致していることがわかる． なお，外力の周波数 400rpm 付近の  $2\omega + p_b$  のピーク， 3600rpm 付近の  $2\omega + p_f$  のピークおよび 3600rpm 付近の  $-2\omega + p_b$  のピークでは，共振曲線のピーク周波数と固有振動数解析の共振周波数で若干のずれがみられる． これは対応する共振を作る固有振動数の関係式のオーダーが  $O(\varepsilon^2)$  オーダーと高次項になるにつれて，高次微小項の打ち切り誤差の影響が表れて

いることが原因と考えられる。したがって、クラックの検出に用いるピークとしては、できるだけオーダの次数が小さい共振を選ぶことが望ましい。

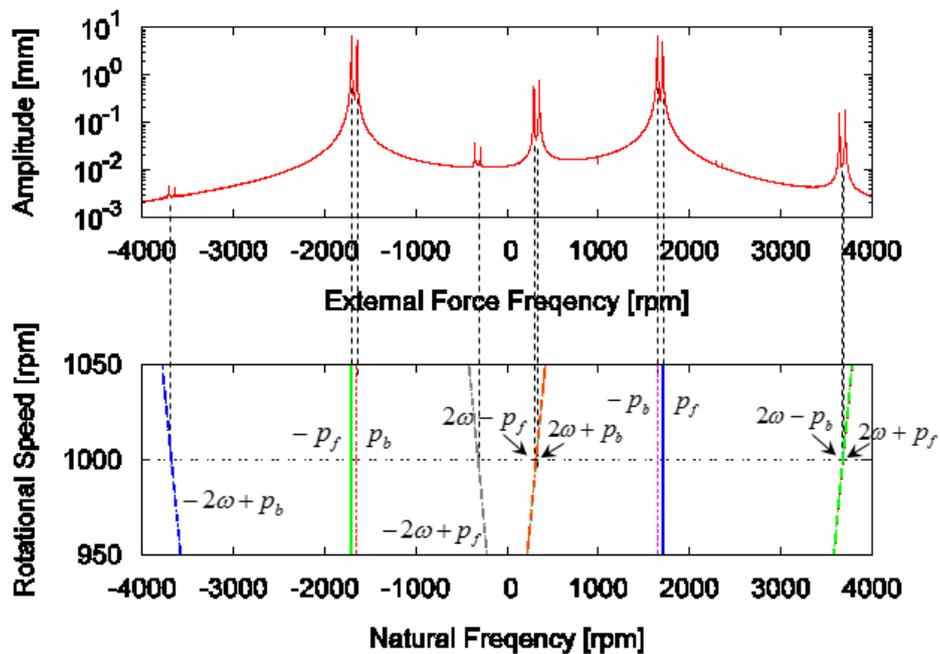


Fig. 5 Resonance curve and natural frequency ( $\omega = 1000$  rpm)

## 5. 周波数伝達関数の構築

### 5・1 運動方程式の変形

ふれまわり運動の回転方向を明確にするために、複素数変位  $z$  と  $\bar{z}$ 、複素数外力  $g$  と  $\bar{g}$  を用いる(Lee, 1991). ここで  $j$  は虚数単位である.

$$\begin{cases} z = x + jy \\ \bar{z} = x - jy \end{cases}, \begin{cases} g = f_x + jf_y \\ \bar{g} = f_x - jf_y \end{cases} \quad (5)$$

この表記を用いて式(2)を変形すると、複素数表記の運動方程式が次式のように得られる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & m \\ -jm & jm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\bar{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c - ji_p\omega & c + ji_p\omega \\ -jc - i_p\omega & jc - i_p\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k + \varepsilon\Delta k_b & k + \varepsilon\Delta k_b \\ -jk + j\varepsilon\Delta k_b & jk - j\varepsilon\Delta k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \\ + \varepsilon\Delta k_c \begin{bmatrix} e^{-j2\omega t} & e^{j2\omega t} \\ je^{-j2\omega t} & -je^{j2\omega t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g \\ \bar{g} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで軸の角速度  $\omega$  と同方向の角速度  $\Omega$  が正であり、たとえば  $g$  が角速度  $\Omega$  の正方向ふれまわり外力を表すとき  $\bar{g}$  は角速度  $\Omega$  の逆方向のふれまわり運動を表す.

### 5・2 各角振動数のふれまわり加振力に対する運動方程式

式(6)の運動方程式の右辺の加振力  $g$  または  $\bar{g}$  に着目し、Fig. 3 に示されたクラックと支持剛性の異方性を介して現れる 5 つのふれまわり振動数の外力を得るように変形することで、各ふれまわり振動加振力に対する運動方程式を導出する.

#### 5・2・1 角振動数 $\Omega$ の加振力に関する式

運動方程式(6)の(第1式) +  $j \times$  (第2式)を行い、右辺を角振動数  $\Omega$  の加振力  $g$  の項とする.

$$m\ddot{z} + (c - ji_p\omega)\dot{z} + kz + \varepsilon\Delta k_b\bar{z} + \varepsilon\Delta k_c e^{j2\omega t}\bar{z} = g \quad (7)$$

この式(7)は、角振動数  $\Omega$  のふれまわり外力  $g$  により角振動数  $\Omega$  のふれまわり成分  $z$  が現れるのに加え、支持剛性の異方性の影響 ( $\varepsilon\Delta k_b$ ) を介して  $-\Omega$  のふれまわり成分  $\bar{z}$  が現れ、クラ

ックの影響( $\varepsilon\Delta k_c$ )を介して $2\omega - \Omega$ のふれまわり成分 $e^{j2\omega}\bar{z}$ が現れ、これらが動的にバランスしていることを表している。

### 5・2・2 角振動数 $-\Omega$ の加振力に関する式

運動方程式(6)の(第1式) -  $j \times$  (第2式)を行い、右辺を角振動数 $-\Omega$ の加振力 $\bar{g}$ の項とする。

$$m\ddot{\bar{z}} + (c + j i_p \omega)\dot{\bar{z}} + k\bar{z} + \varepsilon\Delta k_b z + \varepsilon\Delta k_c e^{-j2\omega} z = \bar{g} \quad (8)$$

この式(8)は角振動数 $-\Omega$ のふれまわり外力 $\bar{g}$ により角振動数 $-\Omega$ のふれまわり成分 $\bar{z}$ が現れるのに加え、支持剛性の異方性の影響( $\varepsilon\Delta k_b$ )を介して $\Omega$ のふれまわり成分 $z$ が現れ、クラックの影響( $\varepsilon\Delta k_c$ )を介して $2\omega + \Omega$ のふれまわり成分 $\varepsilon^2 e^{-j2\omega} z$ が現れ、これらが動的にバランスしていることを表している。

### 5・2・3 角振動数 $2\omega - \Omega$ の加振力に関する式

式(8)の両辺に $e^{j2\omega}$ を掛け、右辺を角振動数 $2\omega - \Omega$ の加振力 $e^{j2\omega}\bar{g}$ の項とする。

$$m e^{j2\omega} \ddot{\bar{z}} + (c + j i_p \omega) e^{j2\omega} \dot{\bar{z}} + k e^{j2\omega} \bar{z} + \varepsilon\Delta k_b e^{j2\omega} z + \varepsilon\Delta k_c z = e^{j2\omega} \bar{g} \quad (9)$$

この式(9)は角振動数 $2\omega - \Omega$ のふれまわり外力 $e^{j2\omega}\bar{g}$ により角振動数 $2\omega - \Omega$ のふれまわり成分 $e^{j2\omega}\bar{z}$ が現れるのに加え、支持剛性の異方性の影響( $\varepsilon\Delta k_b$ )を介して $-2\omega + \Omega$ のふれまわり成分 $e^{j2\omega} z$ が現れ、クラックの影響( $\varepsilon\Delta k_c$ )を介して $\Omega$ のふれまわり成分 $z$ が現れ、これらが動的にバランスしていることを表している。

#### 5・2・4 角振動数 $2\omega + \Omega$ の加振力に関する式

式(7)の両辺に  $e^{-j2\omega t}$  を掛け、右辺を角振動数  $2\omega + \Omega$  の加振力  $e^{-j2\omega t} g$  の項とする。

$$me^{-j2\omega t} \ddot{z} + (c - j\dot{p}\omega)e^{-j2\omega t} \dot{z} + ke^{-j2\omega t} z + \varepsilon\Delta k_b e^{-j2\omega t} \bar{z} + \varepsilon\Delta k_c \bar{z} = e^{-j2\omega t} g \quad (10)$$

この式(10)は角振動数  $2\omega + \Omega$  のふれまわり外力  $e^{-j2\omega t} g$  により角振動数  $2\omega + \Omega$  のふれまわり成分  $e^{-j2\omega t} z$  が現れるのに加え、支持剛性の異方性の影響( $\Delta k_b$ )を介して  $-2\omega - \Omega$  のふれまわり成分  $e^{-j2\omega t} \bar{z}$  が現れ、クラックの影響( $\Delta k_c$ )を介して  $-\Omega$  のふれまわり成分  $\bar{z}$  が現れ、これらが動的にバランスしていることを表している。

#### 5・2・5 角振動数 $-2\omega + \Omega$ の加振力に関する式

式(7)の両辺に  $e^{j2\omega t}$  を掛け、右辺を角振動数  $-2\omega + \Omega$  の加振力  $e^{j2\omega t} g$  の項とする。

$$me^{j2\omega t} \ddot{z} + (c - j\dot{p}\omega)e^{j2\omega t} \dot{z} + ke^{j2\omega t} z + \varepsilon\Delta k_b e^{j2\omega t} \bar{z} + \varepsilon\Delta k_c e^{j4\omega t} \bar{z} = e^{j2\omega t} g \quad (11)$$

この式(11)は角振動数  $-2\omega + \Omega$  のふれまわり外力  $e^{j2\omega t} g$  により角振動数  $-2\omega + \Omega$  のふれまわり成分  $e^{j2\omega t} z$  が現れるのに加え、支持剛性の異方性の影響( $\varepsilon\Delta k_b$ )を介して  $2\omega - \Omega$  のふれまわり成分  $e^{j2\omega t} \bar{z}$  が現れ、クラックの影響( $\varepsilon\Delta k_c$ )を介して  $4\omega - \Omega$  のふれまわり成分  $e^{j4\omega t} \bar{z}$  が現れ、これらが動的にバランスしていることを表している。

### 5・3 伝達関数の導出

式(7)-(11)は、異方性およびクラックの影響を考慮した式となっている。ここで、2節で考察したように、式(7)-(11)の式において考慮した外力に対応する  $z$ ,  $\bar{z}$ ,  $e^{j2\omega t} \bar{z}$ ,  $e^{-j2\omega t} z$ ,

$e^{j2\omega} z$  のふれまわり成分のみを考慮し、それ以外の派生項を省略することにより次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + (c - j i_p \omega)\dot{z} + kz + \varepsilon \Delta k_b \bar{z} + \varepsilon \Delta k_c e^{j2\omega} \bar{z} &= g \\ m\ddot{\bar{z}} + (c + j i_p \omega)\dot{\bar{z}} + k\bar{z} + \varepsilon \Delta k_b z + \varepsilon \Delta k_c e^{-j2\omega} z &= \bar{g} \\ m e^{j2\omega} \ddot{\bar{z}} + (c + j i_p \omega) e^{j2\omega} \dot{\bar{z}} + k e^{j2\omega} \bar{z} + \varepsilon \Delta k_b e^{j2\omega} z + \varepsilon \Delta k_c z &= e^{j2\omega} \bar{g} \\ m e^{-j2\omega} \ddot{z} + (c - j i_p \omega) e^{-j2\omega} \dot{z} + k e^{-j2\omega} z + \varepsilon \Delta k_c \bar{z} &= e^{-j2\omega} g \\ m e^{j2\omega} \ddot{z} + (c - j i_p \omega) e^{j2\omega} \dot{z} + k e^{j2\omega} z + \varepsilon \Delta k_b e^{j2\omega} \bar{z} &= e^{j2\omega} g \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

この式(12)を用いて伝達関数を導出する. なお, これ以降では記号  $\varepsilon$  は省略する. 考慮する 5 つのふれまわり振幅とふれまわり外力について, Table 3 に示すように記号  $z_\Omega$ ,  $z_{-\Omega}$ ,  $z_{2\omega-\Omega}$ ,  $z_{2\omega+\Omega}$ ,  $z_{-2\omega+\Omega}$  と  $g_\Omega$ ,  $g_{-\Omega}$ ,  $g_{2\omega-\Omega}$ ,  $g_{2\omega+\Omega}$ ,  $g_{-2\omega+\Omega}$  を導入する. 右下の添え字はふれまわり運動成分を表す. 式(12)をラプラス変換し, これらの記号を用いて行列形式にまとめると次式を得る. なお, 各変数のラプラス変換は大文字で表記し, ふれまわり振幅とふれまわり外力はそれぞれ  $Z_\Omega(s)$ ,  $Z_{-\Omega}(s)$ ,  $Z_{2\omega-\Omega}(s)$ ,  $Z_{2\omega+\Omega}(s)$ ,  $Z_{-2\omega+\Omega}(s)$  と  $G_\Omega(s)$ ,  $G_{-\Omega}(s)$ ,  $G_{2\omega-\Omega}(s)$ ,  $G_{2\omega+\Omega}(s)$ ,  $G_{-2\omega+\Omega}(s)$  で表す.

$$\mathbf{D} \begin{Bmatrix} Z_\Omega(s) \\ Z_{-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega+\Omega}(s) \\ Z_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_\Omega(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega-\Omega}(s) \\ G_{2\omega+\Omega}(s) \\ G_{-2\omega+\Omega}(s) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに係数行列  $\mathbf{D}$  は次式であり,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \Delta k_b & \Delta k_c & 0 & 0 \\ \Delta k_b & D_2 & 0 & \Delta k_c & 0 \\ \Delta k_c & 0 & D_3 & 0 & \Delta k_b \\ 0 & \Delta k_c & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_b & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

その成分は

$$\begin{aligned}
D_1 &= ms^2 + (c - ji_p\omega)s + k \\
D_2 &= ms^2 + (c + ji_p\omega)s + k \\
D_3 &= ms^2 + \{c + j(i_p - 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(i_p - 2m)\omega^2 \\
D_4 &= ms^2 + \{c - j(i_p - 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(-i_p - 2m)\omega^2 \\
D_5 &= ms^2 + \{c - j(i_p + 4m)\omega\}s + k - j2c\omega + 2(-i_p - 2m)\omega^2
\end{aligned} \tag{15}$$

である.

Table 3 Transformation of variable

Whirl component	Displacement	Force
	change of variable	change of variable
$\Omega$	$z_\Omega := z$	$g_\Omega := g$
$-\Omega$	$z_{-\Omega} := \bar{z}$	$g_{-\Omega} := \bar{g}$
$2\omega - \Omega$	$z_{2\omega - \Omega} := e^{j2\omega t} \bar{z}$	$g_{2\omega - \Omega} := e^{j2\omega t} \bar{g}$
$2\omega + \Omega$	$z_{2\omega + \Omega} := e^{-j2\omega t} z$	$g_{2\omega + \Omega} := e^{-j2\omega t} g$
$-2\omega + \Omega$	$z_{-2\omega + \Omega} := e^{j2\omega t} z$	$g_{-2\omega + \Omega} := e^{j2\omega t} g$

この式(13)-(15)から, 等方性支持の正常軸 ( $\Delta k_c = \Delta k_b = 0$ ) の場合は  $D_i = 0 (i=1, \dots, 5)$  の根で共振することがわかる. そこで, 以降の解析の考察のために, この根の虚部を記号  $p_{i1}, p_{i2} (i=1, \dots, 5)$  で表すこととする. これらは固有振動数の Fig. 4 でも述べたように,

$$p_{11}, p_{12} = p_f, p_b, \quad p_{21}, p_{22} = -p_f, -p_b, \quad p_{31}, p_{32} = 2\omega - p_f, 2\omega - p_b, \quad p_{41}, p_{42} =$$

$$-2\omega + p_f, -2\omega + p_b, \quad p_{51}, p_{52} = 2\omega + p_f, 2\omega + p_b \text{ で特性づけられる.}$$

式(13)の係数行列の逆行列  $\mathbf{D}^{-1}$  を左からかけることにより次の伝達関数を得る.

$$\begin{Bmatrix} Z_\Omega(s) \\ Z_{-\Omega}(s) \\ Z_{2\omega - \Omega}(s) \\ Z_{2\omega + \Omega}(s) \\ Z_{-2\omega + \Omega}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & H_{13}(s) & H_{14}(s) & H_{15}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & H_{23}(s) & H_{24}(s) & H_{25}(s) \\ H_{31}(s) & H_{32}(s) & H_{33}(s) & H_{34}(s) & H_{35}(s) \\ H_{41}(s) & H_{42}(s) & H_{43}(s) & H_{44}(s) & H_{45}(s) \\ H_{51}(s) & H_{52}(s) & H_{53}(s) & H_{54}(s) & H_{55}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_\Omega(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega - \Omega}(s) \\ G_{2\omega + \Omega}(s) \\ G_{-2\omega + \Omega}(s) \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} G_\Omega(s) \\ G_{-\Omega}(s) \\ G_{2\omega - \Omega}(s) \\ G_{2\omega + \Omega}(s) \\ G_{-2\omega + \Omega}(s) \end{Bmatrix} \tag{16}$$

ここで  $H_{11}(s) \sim H_{55}(s)$  は伝達関数行列  $\mathbf{H}$  の成分である.

## 6. 伝達関数を用いた周波数応答の計算

### 6・1 等方性の支持特性を有する正常軸の場合

支持剛性が等方性の正常軸の場合は、式(13)あるいは式(16)に  $\Delta k_c = \Delta k_b = 0$  を代入することにより表せる。これは Lee が提案した伝達関数表現となる (Lee, 1991) (Lee, 1993)。このとき係数行列  $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{D}_1$  とすると、

$$\mathbf{D}_1(s) = \text{diag} [D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s), D_5(s)] \quad (17)$$

となり、このときの伝達関数行列  $\mathbf{H}$  を  $\mathbf{H}_1$  とすると、

$$\mathbf{H}_1(s) = \text{diag} [H_{11}(s), H_{22}(s), H_{33}(s), H_{44}(s), H_{55}(s)] \quad (18)$$

となる。ここに

$$H_{11}(s) = \frac{1}{D_1(s)}, H_{22}(s) = \frac{1}{D_2(s)}, H_{33}(s) = \frac{1}{D_3(s)}, H_{44}(s) = \frac{1}{D_4(s)}, H_{55}(s) = \frac{1}{D_5(s)} \quad (19)$$

である。このとき伝達関数行列  $\mathbf{H}_1$  の第一行目に着目すると、伝達関数  $H_{11}$  は加振周波数  $\Omega$  の関数となり、伝達関数  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{15}$  のゲインはすべての周波数域において 0 である。

### 6・2 支持剛性に異方性を有する正常軸の場合

支持剛性に異方性を有する正常軸の場合は、式(13)あるいは式(16)に  $\Delta k_c = 0$  を代入することにより表せる。これは Lee が提案した伝達関数表現となる (Lee, 1993)。このとき係数行列  $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{D}_2$  とすると、

$$\mathbf{D}_2(s) = \begin{bmatrix} D_1 & \Delta k_b & 0 & 0 & 0 \\ \Delta k_b & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & \Delta k_b \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_b & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

となり，伝達関数行列  $\mathbf{H}$  を  $\mathbf{H}_2$  とすると，

$$\mathbf{H}_2(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{2a}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (21)$$

となる．ここに

$$\mathbf{H}_{2a}(s) = \begin{bmatrix} -D_2 & \Delta k_b \\ \frac{(\Delta k_b^2 - D_1 D_2)}{\Delta k_b} & \frac{(\Delta k_b^2 - D_1 D_2)}{-D_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{2b}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-D_5}{(\Delta k_b^2 - D_3 D_5)} & 0 & \frac{\Delta k_b}{(\Delta k_b^2 - D_3 D_5)} \\ 0 & \frac{1}{D_4} & 0 \\ \frac{\Delta k_b}{(\Delta k_b^2 - D_3 D_5)} & 0 & \frac{-D_3}{(\Delta k_b^2 - D_3 D_5)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

である．このとき伝達関数行列  $\mathbf{H}_2$  の第一行目に着目すると，支持剛性の異方性の影響は伝達関数  $H_{11}$  のみならず伝達関数  $H_{12}$  にも影響を及ぼし，伝達関数  $H_{11}$  と  $H_{12}$  が共に加振周波数  $\Omega$  の関数となる．伝達関数  $H_{13}$ ， $H_{14}$ ， $H_{15}$  のゲインは等方性の場合と同様，すべての周波数域において 0 である．

### 6・3 剛性に等方性を有する軸受に支持されたクラック軸の場合

軸受剛性が等方性におけるクラック軸の場合，運動方程式 (式(13)) およびそれをラプラス変換した式(16)に  $\Delta k_b = 0$  を代入したものである．このとき係数行列  $\mathbf{D}$  は

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \Delta k_c & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \Delta k_c & 0 \\ \Delta k_c & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta k_c & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (23)$$

となり，伝達関数行列  $\mathbf{H}$  は次式となる．



$$\begin{aligned}
H_D &= D_4 \Delta k_b^4 + D_5 \Delta k_c^4 + D_1 \Delta k_b^2 \Delta k_c^2 \\
&\quad - (D_1 D_2 D_4 + D_3 D_4 D_5) \Delta k_b^2 - (D_1 D_3 D_5 + D_2 D_4 D_5) \Delta k_c^2 + D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 \\
H_{11} &= \Delta k_b^2 \Delta k_c^2 - D_2 D_4 \Delta k_b^2 - D_3 D_5 \Delta k_c^2 - D_2 D_3 D_4 D_5 \\
H_{22} &= -D_1 D_4 \Delta k_b^2 - D_4 D_5 \Delta k_c^2 + D_1 D_3 D_4 D_5 \\
H_{33} &= -D_4 D_5 \Delta k_b^2 - D_1 D_5 \Delta k_c^2 + D_1 D_2 D_4 D_5 \\
H_{44} &= \Delta k_b^4 - D_3 D_5 \Delta k_b^2 - D_1 D_2 \Delta k_b^2 - D_2 D_5 \Delta k_c^2 + D_1 D_2 D_3 D_5 \\
H_{55} &= \Delta k_c^4 - D_3 D_4 \Delta k_b^2 - D_1 D_3 \Delta k_c^2 - D_2 D_4 \Delta k_c^2 + D_1 D_2 D_3 D_4 \\
H_{24} &= D_5 \Delta k_c^3 + D_1 \Delta k_b^2 \Delta k_c - D_1 D_3 D_5 \Delta k_c \\
H_{35} &= D_4 \Delta k_b^3 + D_1 \Delta k_c^2 \Delta k_b - D_1 D_2 D_4 \Delta k_b
\end{aligned} \tag{26}$$

である。回転速度  $\omega = 1000$  rpm の定格運転条件において、Fig. 6 に伝達関数  $H_{11}$  を、Fig. 7 に伝達関数  $H_{12}$  を、Fig. 8 に伝達関数  $H_{13}$  を、Fig. 9 に伝達関数  $H_{14}$  の周波数応答を、Fig. 10 に伝達関数  $H_{15}$  の周波数応答を示す。

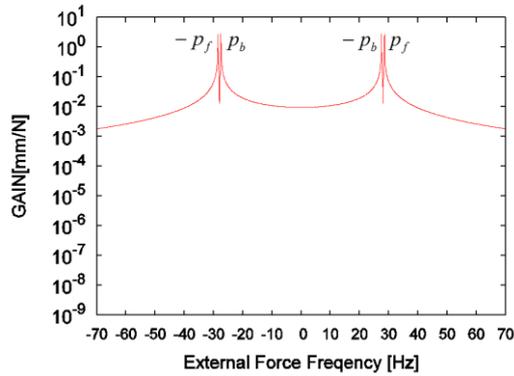


Fig. 6 Transfer function  $H_{11}$  ( $\omega = 1000$  rpm)

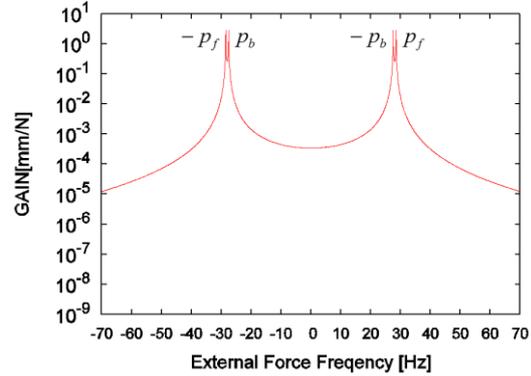


Fig. 7 Transfer function  $H_{12}$  ( $\omega = 1000$  rpm)

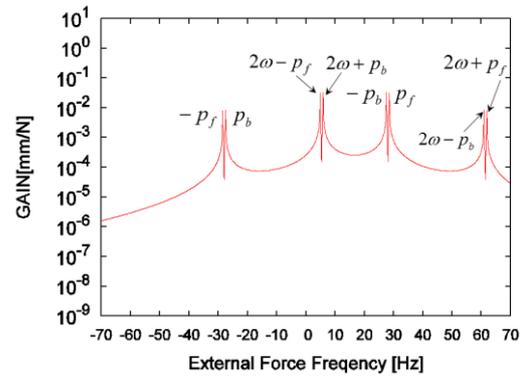


Fig. 8 Transfer function  $H_{13}$  ( $\omega = 1000$  rpm)

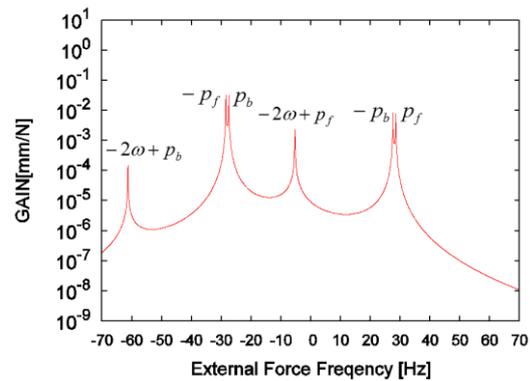


Fig. 9 Transfer function  $H_{14}$  ( $\omega = 1000$  rpm)

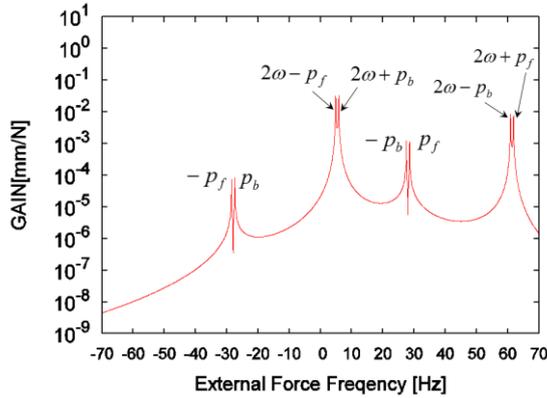


Fig. 10 Transfer function  $H_{15}$  ( $\omega=1000$  rpm)

Fig. 6～Fig. 10 は、横軸をふれまわり加振周波数（-70[Hz]から 70[Hz]の範囲）に取り、縦軸を伝達関数  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{15}$  の周波数応答のゲインを対数目盛で取ったものである。Fig. 6～Fig. 10 より、伝達関数は  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{15}$  の順にゲインが小さくなっており、より高次の派生項になるほど影響の度合いが小さくなっていることが読み取れる。

伝達関数  $H_{11}$  (Fig. 6), 伝達関数  $H_{12}$  (Fig. 7) の周波数応答では、 $p_f$ ,  $p_b$ ,  $-p_f$ ,  $-p_b$  成分のみ観察されるが、伝達関数  $H_{13}$  (Fig. 8), 伝達関数  $H_{14}$  (Fig. 9), 伝達関数  $H_{15}$  (Fig. 10) の周波数応答ではクラックの影響、クラックと軸受剛性の異方性との相互作用の影響によって、多くの周波数成分が観察される。これらの周波数成分には Fig. 3 のふれまわり加振力とふれまわり運動成分の派生成分の関係において、 $\Omega = p_f, p_b$ ,  $-\Omega = p_f, p_b$ ,

$2\omega - \Omega = p_f, p_b$ ,  $2\omega + \Omega = p_f, p_b$ ,  $-2\omega + \Omega = p_f, p_b$  が成立する。したがって、クラック

と軸受剛性の異方性の相互作用の影響を表す  $2\omega + \Omega = p_f$ ,  $2\omega + \Omega = p_b$ ,  $-2\omega + \Omega = p_b$ ,

$-2\omega + \Omega = p_f$  の派生周波数の関係を元に求められる加振周波数  $\Omega = -2\omega + p_f$ ,

$\Omega = -2\omega + p_b$ ,  $\Omega = 2\omega + p_b$ ,  $\Omega = 2\omega + p_f$  において生じる共振ピークが、クラックと軸受剛

性の異方性の相互作用の影響に起因するものである。

## 7. 伝達関数の精度検証

### 7・1 伝達関数とシミュレーションから得られた周波数応答の比較

6・4 節では剛性に異方性を有する軸受に支持されたクラック軸を大域的な周波数で周波数応答の特徴を述べた。本節ではクラック検知に適用することを前提に、伝達関数  $H_{13}$  の中で軸受の支持剛性とクラックの相互作用の影響によって現れる  $2\omega + p_b$  成分近傍において、伝達関数とシミュレーションから得られた周波数応答を比較することで、提案する伝達関数の精度を検証する。

Fig. 11 の結果より、伝達関数により得られた周波数応答とシミュレーションから得られた周波数応答は、クラック検知を実施する  $2\omega + p_b$  成分近傍において、良好に一致していることが確認できる。このことから、初期クラック検知の目的において、本報で提案した伝達関数の利用が可能である。

### 7・2 クラック深さの影響 ( $\Delta k_c = 0.5 \times 10^{-2} k$ とした場合)

7・1 項の検討において、対象としたロータ系のクラック深さは軸に対して 50% の深さであった。ここでは、初期クラックを想定しクラックに関する剛性  $\Delta k_c$  が小さい場合を検討する。そこでクラックに関する剛性  $\Delta k_c$  を元のロータ系における  $\Delta k_c$  の値の約半分である  $\Delta k_c = 0.5 \times 10^{-2} k$  に変更して、伝達関数  $H_{13}$  の  $2\omega + p_b$  成分近傍の周波数応答を計算する。

$\Delta k_c = 0.5 \times 10^{-2} k$  に変更した伝達関数 (式(16)) から算出した周波数応答と、シミュレーション結果から算出した周波数応答を Fig. 12 に示す。

Fig. 12 の結果より、伝達関数により得られた周波数応答とシミュレーションから得られた周波数応答は、クラック検知を実施する  $2\omega + p_b$  成分近傍において、良好に一致していることが確認できる。このことから、初期クラック検知の目的において、本報で提案した伝達関数の利用が可能である。

一方、Fig. 11 と Fig. 12 を比較すると、クラック深さを小さくしたことで  $2\omega + p_b$  成分におけるピークゲインはわずかながら低下している。したがって、より初期段階でクラックを検出するためには、検出精度に注意する必要がある、検出精度の高いセンサを用いることや外乱となるロータの不釣合いを取り除いておくことが望ましい。

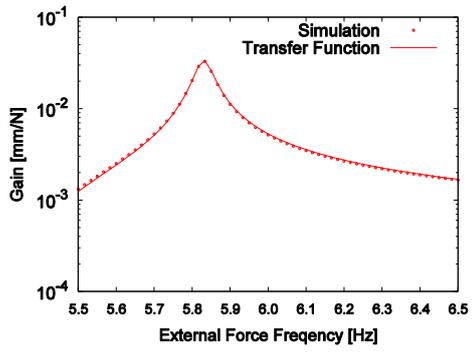


Fig. 11 Transfer function  $H_{13}$  at  $2\omega + p_b$  component ( $\omega = 1000$  rpm)

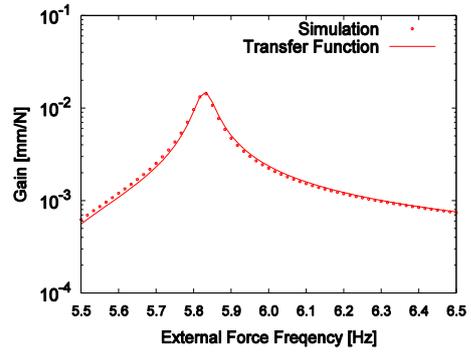


Fig. 12 Transfer function  $H_{13}$  at  $2\omega + p_b$  component ( $\omega = 1000$  rpm)

## 8. 結言

本研究では、オープンクラックと軸受剛性の異方性の相互作用を考慮したロータ系のクラック検知のための伝達関数を導出し、以下の知見を得た。

- ・単純ロータモデルを用いてオープンクラックと軸受剛性の異方性の両方を考慮した伝達関数を導出した。

- ・クラック及び異方性の影響を 3 回以上介して現れる周波数成分については打ち切るという方法で解析を行った。すなわち、振動数 $\Omega$ の加振力からクラック及び異方性の影響を 2 回まで介して得られる振動数 $\Omega$ ,  $-\Omega$ ,  $2\omega - \Omega$ ,  $2\omega + \Omega$ ,  $-2\omega + \Omega$ の各ふれまわり成分への伝達関数を解析的に導出した。

- ・得られた伝達関数と固有振動数線図の比較から提案する伝達関数の妥当性を確認した。

以上の結果より、本報で提案するオープンクラックと軸受剛性の異方性の両方を考慮した伝達関数表現の有効性を示すことができた。今後は、ロータ軸に円板を追加することで、複雑なロータ系に対しても本手法が有効であるかを検証してゆく。

## 文献

J.Wauer, On the dynamics of cracked rotors:A literature survey, *Transaction of the American Society Mechanical Engineers, Applied Mechanics Review*, vol43,(1990),pp.13-17.

R.Gasch, A survey of Dynamics Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, *Japan of Sound and Vibration*, Vol.160, No.2, (1993),pp.313-332.

Inagaki,T.,Kanki,H.,Shiraki,K.,Transverse Vibration of a General Cracked Rotor Bearing System, *Transactions of the American society Mechanical Engineers, Jouran of Mechanical Design*, Vol.104, (1982), pp.345-355.

I.W.Mayes, and W.G.R.Davies, Analysis of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability, Stress, and Reliability in Design*, vol.108, (1986), pp.189-197.

H.D.Nelson and C.Nataraj, The Dynamics of a Rotor System with a Cracked Shaft, *Transactions of the American society Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol.108, (1986), pp.189-197.

W.G.R.Davies and I.W.Mayes,The Vibrational Behavior of a Multi-shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating transverse Crack, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol.106, (1984), pp.146-153.

I.Imam, S.H.Azzaro, R.J.Bankert and J.Scheibel, Development of an On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System, *Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol.111, (1989), pp.241-251.

N.Bachschnid, P.Pennacchi, E.Tanzi and A.Vania, Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems, *Mechanica*, (2000), pp.563-582.

Kulesza, Z. and Jerzy T. Sawicki, J. T., Rigid finite element model of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No.18 (2012), pp.4145–4169.

Liong, R. T., and Proppe, C., Finite Element Multibody Simulation of a Breathing Crack in a Rotor with a Cohesive Zone Model, *International Scholarly Research Notices Mechanical Engineering*, (2013) pp.1–10.

Lee,C.W, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers, 1993

C.W.Lee, A complex modal testing theory for rotating machinery, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.5, No.2, (1991), pp.119-137.

C.W.Lee and Y.D.Joh , Theory of excitation methods and estimation of frequency response functions in complex modal testing of rotating machinery, *Mechanical*

Systems and Signal Processing, Vol.7, No.1, (1993), pp.57-74.

C.W.Lee and C.Y.Joh , Development of the use of directional frequency response functions for the diagnosis of anisotropy and asymmetry in rotating machinery, theory, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.8, No.6,(1994), pp.665-678.

C.W.Lee , An efficient complex modal testing theory for asymmetric rotor systems, use of unidirectional, Journal of Sound and Vibration, Vol.206, No.3, (1997), pp.327-338.

Y.H.Seo and C.W.Lee, Crack Identification in a Rotating Shaft via the Reverse Directional Frequency Response Functions, Transactions of the American Society Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics,vol.131, (2009), 011012-pp.1-12.

Lee,C.W, “Stability and Strength of Modes in Rotating Machinery”, Proceedings of ISCORMA-3 (2005)

Seo, Y. H., Kang, S.W. and Lee,C.W, Identification of Anisotropy and Asymmetry in Rotor System from Directional Frequency Response Estimates, Proceedings of ISCORMA-3 (2005)

永田信博, 井上剛志, オープンクラックを有する回転軸系を周期加振した際の有限要素解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.799, (2013), pp113-123

永田信博, 井上剛志, オープンクラックを有する回転軸系の有限要素解析(系の支持剛性が異方性の場合の固有振動数解析と 2 倍周波数振動), 日本機械学会論文集, C 編, Vol.78, No.794, (2012), pp105-115

永田信博, 井上剛志, 加藤祥典, ロータ系のオープンクラックの 1D-FEM モデルとそのパラメータの決定法(パラメータを支配する関係式の 3D-FEM ソフトウェアを援用した導出), 日本機械学会論文集, C 編, Vol.78, No.789, (2012), pp.397-406

山本敏男, 石田幸男, 回転機械の力学, コロナ社, 2001

池田隆, 中川紀壽, 弾性支持された偏平回転軸系の主危険速度付近における不安定振動, 日本機械学会論文集, C 編, Vol.59, No.566, (1993), pp.3058-3064