

1102

輪軸蛇行動の非線形分岐解析に基づく車両パラメータ設計手法の検討

安藝 雅彦^{*1}

Basic Study of Vehicle Parameter Design Based on Nonlinear Bifurcation Analysis of Hunting Motion of a Wheelset

Masahiko AKI^{*1}

^{*1} College of Science and Technology, Nihon University
1-8-14 Surugadai, Kanda, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8308, Japan

This paper deals with a parameter design for a nonlinear hunting motion of a railway wheelset. If a railway vehicle runs under a critical speed, a hunting motion might occur by an effect of a nonlinearity of a hunting motion. In order to remove a factor for hunting motion under a critical speed, a nonlinear analysis of a hunting motion was carried out. In order to analyze a nonlinear hunting motion, equations of motion with third-order polynomial approximation based on a single axle truck was used. A center manifold theory was applied to the equations of motion and equations of motion of a normal form were derived. An equation of a limit cycle amplitude was obtained using the equations of motion of the normal form. By using the equation of a limit cycle amplitude, a relationship between an amplitude of a limit cycle and vehicle parameters were considered.

Key Words : Railway Vehicle, Hunting Motion, Nonlinear Vibration, Bifurcation Analysis, Parameter Design

1. 結 言

鉄道車両に特有の振動問題に蛇行動がある⁽¹⁾。蛇行動に関する研究は長く行われており⁽²⁾⁽³⁾、それらの結果が台車設計に用いられている。これらの研究の多くは線形な範囲に限定し、線形な運動方程式を元にしたものである。しかし、線形な範囲の運動方程式により得られる蛇行動限界速度は、実際の蛇行動発生速度とは差があることが指摘されている⁽⁴⁾。これを解決するために、クリープ力の非線形性を考慮した研究が行われている⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。一方、その他の非線形性を考慮した研究も行われており、近年では蛇行動の分岐現象を対象とした研究が行われている⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

分岐現象の視点で見ると鉄道における蛇行動では、ホップ分岐が生ずることが知られている。蛇行動限界速度近傍における分岐のタイプは、車両のパラメータにより亜臨界ホップ分岐と超臨界ホップ分岐の2つに分けられる。文献(11)(12)などの研究では、設計パラメータによって亜臨界ホップ分岐(図1(a))と超臨界ホップ分岐(図1(b))で分岐形態が変化することが報告されている。亜臨界ホップ分岐の場合には、蛇行動限界速度未満でも蛇行動振幅解が存在するため、軌道外乱が加わることによって蛇行動が発生する可能性がある(図2)。この観点からみれば、亜臨界ホップ分岐が発生する設計パラメータよりも超臨界ホップ分岐が発生する設計パラメータを用いることが好ましい。このような観点から、回転機械の分野において文献(13)では、回転機械の設計パラメータを調整することで、亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐になるように設計する手法が検討されている。

本報では、設計パラメータを調整することによって、蛇行動において亜臨界ホップ分岐の特性がどのようにに変化するか検討する。まず、一軸台車を対象にして非線形項を含む運動方程式⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾を用い、中心多様体理論により、力学系を平衡点の分岐に関するモードのみに低次元化する⁽⁷⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。次に中心多様体理論を用いた非線形座標変換により、分岐現象を支配する標準形の微分方程式を導出する⁽⁷⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。この標準形の考察から安定限界近傍で発生するリミットサイクル軌道の大きさにより、台車の設計パラメータの基礎検討を行ったので報告する。

^{*1} 正員, 日本大学理工学部 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)
E-mail of corresponding author: aki@mech.cst.nihon-u.ac.jp



図1 ホップ分岐

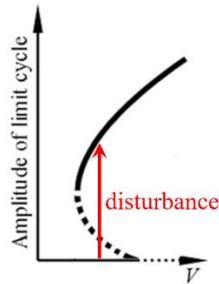


図2 危険速度未満における外乱による蛇行動の発生

2. 蛇行動解析モデル

2・1 1軸台車の運動方程式

図3に示す1軸台車モデルを用いて検討を行う。

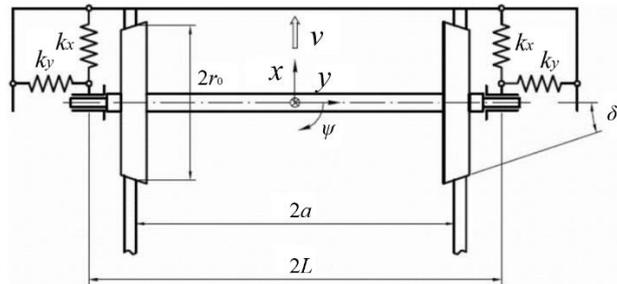


図3 1軸台車モデル

この車両モデルの運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \hat{m} \frac{d^2 \hat{y}}{dt^2} + \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{v}} \frac{d\hat{y}}{dt} + 2\hat{k}_y \hat{y} - 2\hat{f}_{22}\psi + \hat{\alpha}_{yyy} \hat{y}^3 + \hat{\alpha}_{yy\psi} \hat{y}^2 \psi + \hat{\alpha}_{y\psi\psi} \hat{y} \psi^2 + \hat{\alpha}_{\psi\psi\psi} \psi^3 &= 0 \\ \hat{I} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{2\hat{a}^2 \hat{f}_{11}}{\hat{v}} \frac{d\psi}{dt} + \frac{2\hat{f}_{11} \hat{a} \delta_0}{\hat{r}_0} \hat{y} + 2\hat{k}_x \hat{L}^2 \psi + \hat{\beta}_{yyy} \hat{y}^3 + \hat{\beta}_{yy\psi} \hat{y}^2 \psi + \hat{\beta}_{y\psi\psi} \hat{y} \psi^2 + \hat{\beta}_{\psi\psi\psi} \psi^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

は文献(10)(15)で示された運動方程式を簡略化したもので、非線形項は文献(7)で示されたものを用いた。ここで、各記号の上にハットがついた物理量は有次元であることを表す。 \hat{m} は輪軸の質量、 \hat{I} はy軸に関する慣性モーメント、 \hat{f}_{11} と \hat{f}_{22} はKalkerのクリープ係数、 \hat{r}_0 は車輪半径、 δ_0 は踏面勾配、 \hat{a} は軌間の1/2の距離、 \hat{L} は支持ばね距離の1/2の距離、 \hat{k}_x と \hat{k}_y は支持ばね剛性である。各パラメータの値は

$$\hat{m} = 1612\text{kg}, \hat{I} = 881\text{kgm}^2, \hat{r}_0 = 0.46\text{m}, \delta_0 = 0.13,$$

$$2\hat{a} = 1.435\text{m}, 2\hat{L} = 2.0\text{m}, \hat{k}_x = \hat{k}_y = 1.2\text{MN/m}, \hat{f}_{11} = 13.7\text{MN}, \hat{f}_{22} = 11.1\text{MN}$$

を用い、⁽¹⁰⁾⁽¹⁵⁾、非線形項の係数 $\hat{\alpha}_{yyy}, \hat{\alpha}_{yy\psi}, \hat{\alpha}_{y\psi\psi}, \hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}, \hat{\beta}_{yyy}, \hat{\beta}_{yy\psi}, \hat{\beta}_{y\psi\psi}, \hat{\beta}_{\psi\psi\psi}$ は、蛇行動限界速度以上のある速度で蛇行動振幅が文献(15)の結果と一致するように値を設定した。なお、

次節の非線形解析を行うために、式(1)の運動方程式を無次元化する。基準長さを \hat{a} 、基準時間を \hat{t}_0 、時間の基準量 \hat{t}_{st} は系の固有角振動数 $\hat{\omega}_\varphi$ を用いて $\hat{t}_0 \hat{\omega}_\varphi = 1$ となるように設定すると

$$\hat{t} = \hat{t}_{st} t, \hat{y} = \hat{a} y, \hat{\omega} = \hat{\omega}_{st} \omega, \hat{t}_{st} = \frac{1}{\hat{\omega}_{st}}, \hat{v} = \hat{a} \hat{\omega}_{st} v \quad (2)$$

の関係が得られる。したがって無次元化した運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v} \frac{dy}{dt} + \frac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y - \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \psi + \frac{\hat{\alpha}_{yyy} \hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 + \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi} \hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi + \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 + \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 &= 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{2\hat{a}\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt} + \frac{2\hat{f}_{11} \hat{a}^2 \delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0 \hat{\omega}_{st}^2} y + \frac{2\hat{k}_x \hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \psi + \frac{\hat{\beta}_{yyy} \hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 + \frac{\hat{\beta}_{yy\psi} \hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi + \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi} \hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 + \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。以降では、変数の時間微分はドットを用いて表す。

3. 蛇行動の非線形理論解析

3・1 中心多様体定理による低次元化

運動方程式を状態空間モデルで表す。平衡点からの無次元変位と無次元速度を用い、状態量ベクトルを $\mathbf{X} = [y \ \psi \ \dot{y} \ \dot{\psi}]^T$ とする。線形部を \mathbf{AX} 、非線形部を \mathbf{N} とすると、状態方程式は

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{N}(\mathbf{X}, \varepsilon) \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v} & 0 & -\frac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} & \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 0 & -\frac{2\hat{a}\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v} & -\frac{2\hat{f}_{11} \hat{a}^2 \delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0 \hat{\omega}_{st}^2} & -\frac{2\hat{k}_x \hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \psi \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\hat{\alpha}_{yyy} \hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 - \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi} \hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi - \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 - \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 \\ -\frac{\hat{\beta}_{yyy} \hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 - \frac{\hat{\beta}_{yy\psi} \hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi - \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi} \hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 - \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

と表される。

\mathbf{A} の固有値の実部が負から正になるときの車両速度を蛇行動限界速度 v_c とする。この v_c が分岐点である。蛇行動限界速度 v_c からの速度変動を ε とすると、走行速度 v は

$$v = v_c (1 + \varepsilon) \quad (6)$$

と書くことができる。これを式(5)に代入し、線形項と非線形項を分けて記述すると

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{N}'(\mathbf{X}, \varepsilon) \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v_c} & 0 & -\frac{2\hat{k}_y}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} & \frac{2\hat{f}_{22}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 0 & -\frac{2\hat{a}\hat{f}_{11}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \frac{1}{v_c} & -\frac{2\hat{f}_{11} \hat{a}^2 \delta_0}{\hat{I}\hat{r}_0 \hat{\omega}_{st}^2} & -\frac{2\hat{k}_x \hat{L}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \psi \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\hat{f}_{22}\varepsilon}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2 v_c (1+\varepsilon)} \dot{y} - \frac{\hat{\alpha}_{yyy} \hat{a}^2}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 - \frac{\hat{\alpha}_{yy\psi} \hat{a}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi - \frac{\hat{\alpha}_{y\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 - \frac{\hat{\alpha}_{\psi\psi\psi}}{\hat{m}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 \\ \frac{2\hat{a}\hat{f}_{11}\varepsilon}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2 v_c (1+\varepsilon)} \dot{\psi} - \frac{\hat{\beta}_{yyy} \hat{a}^3}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^3 - \frac{\hat{\beta}_{yy\psi} \hat{a}^2}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y^2 \psi - \frac{\hat{\beta}_{y\psi\psi} \hat{a}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} y \psi^2 - \frac{\hat{\beta}_{\psi\psi\psi}}{\hat{I}\hat{\omega}_{st}^2} \psi^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。

つぎに、以下の座標変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{PZ} \quad (9)$$

を考える。ここで、

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \quad (10)$$

である。これを具体的に書くと

$$\left. \begin{aligned} y &= P_{11}q_1 + P_{12}q_2 + P_{13}q_3 + P_{14}q_4 \\ \varphi &= P_{21}q_1 + P_{22}q_2 + P_{23}q_3 + P_{24}q_4 \\ \dot{y} &= P_{31}q_1 + P_{32}q_2 + P_{33}q_3 + P_{34}q_4 \\ \dot{\varphi} &= P_{41}q_1 + P_{42}q_2 + P_{43}q_3 + P_{44}q_4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。

式(9)より、式(8)は次のように

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{N}'(\mathbf{q}, \varepsilon) \quad (12)$$

と表現される。式の両辺に左から \mathbf{P}^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}'(\mathbf{q}, \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 $\mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) = [N''_1 \quad N''_2 \quad N''_3 \quad N''_4]^T$ とすると、

$$\mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) = \begin{bmatrix} N''_1 \\ N''_2 \\ N''_3 \\ N''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & P_{12}^{-1} & P_{13}^{-1} & P_{14}^{-1} \\ P_{21}^{-1} & P_{22}^{-1} & P_{23}^{-1} & P_{24}^{-1} \\ P_{31}^{-1} & P_{32}^{-1} & P_{33}^{-1} & P_{34}^{-1} \\ P_{41}^{-1} & P_{42}^{-1} & P_{43}^{-1} & P_{44}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ N'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1}N'_1 + P_{12}^{-1}N'_2 \\ P_{21}^{-1}N'_1 + P_{22}^{-1}N'_2 \\ P_{31}^{-1}N'_1 + P_{32}^{-1}N'_2 \\ P_{41}^{-1}N'_1 + P_{42}^{-1}N'_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

のように表現される。

いま、速度の変動分 ε を状態量とみなし、 $\dot{\varepsilon} = 0$ を方程式系に加えると

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}''(\mathbf{q}, \varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

を得る。ここで、

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_{1r} & \lambda_{1i} & 0 & 0 \\ -\lambda_{1i} & \lambda_{1r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2r} & \lambda_{2i} \\ 0 & 0 & -\lambda_{2i} & \lambda_{2r} \end{bmatrix} \quad (16)$$

である。なお、分岐点近傍において $\lambda_{1r} = 0$ であるので

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{1i} & 0 & 0 \\ -\lambda_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2r} & \lambda_{2i} \\ 0 & 0 & -\lambda_{2i} & \lambda_{2r} \end{bmatrix} \quad (17)$$

である。これを整理すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1i}q_2 + N_1'' \\ -\lambda_{1i}q_1 + N_2'' \\ \lambda_{3r}q_3 + \lambda_{3i}q_4 + N_3'' \\ -\lambda_{3i}q_3 + \lambda_{3r}q_4 + N_4'' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる。

q_3, q_4 は安定部分空位間, q_1, q_2, ε は中心部分空間であるため, q_3, q_4 は q_1, q_2, ε に関する 2 次以上の項のみで構成される式で, 以下のように

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= \chi_{1200}q_1^2 + \chi_{1110}q_1q_2 + \chi_{1101}q_1\varepsilon + \chi_{1020}q_2^2 + \chi_{1011}q_2\varepsilon + \chi_{1002}\varepsilon^2 + \dots \\ q_4 &= \chi_{2200}q_1^2 + \chi_{2110}q_1q_2 + \chi_{2101}q_1\varepsilon + \chi_{2020}q_2^2 + \chi_{2011}q_2\varepsilon + \chi_{2002}\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

とおける。式(19)を時間微分すると

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_3 &= \frac{\partial q_3}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial q_3}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial q_3}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \\ \dot{q}_4 &= \frac{\partial q_4}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial q_4}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial q_4}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。式(18)と式(20)の \dot{q}_3, \dot{q}_4 を等しく置き, q_1, q_2, ε に関するべき係数を比較することで, 係数 $\chi_{1200}, \chi_{1110}, \dots$ が求まる。これを式(19)に代入することで, 中心多様体が求まる。

最終的に q_1, q_2, ε からなる低次元化された運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda_{1i}q_2 + N_1'' \\ \dot{q}_2 &= -\lambda_{1i}q_1 + N_2'' \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。

3・2 標準形理論による非線形項の除去

式(21)の運動方程式に対して, 標準形理論を用いた非線形座標変換を施す。まず, 式(21)を対角化する。 q_1, q_2 を以下のように座標変換する。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

このとき, 式(21)は次式のように

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1''(r_1, r_2, \varepsilon) \\ N_2''(r_1, r_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (23)$$

と対角化される。

ここで, s_1, s_2, ε に関する 2 次と 3 次からなる関数 h_1, h_2 を用いて非線形座標変換

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= s_1 + h_1(s_1, s_2, \varepsilon) = s_1 + \Gamma_{1200}s_1^2 + \Gamma_{1110}s_1s_2 + \dots + \Gamma_{1003}\varepsilon^3 \\ r_2 &= s_2 + h_2(s_1, s_2, \varepsilon) = s_2 + \Gamma_{2200}s_1^2 + \Gamma_{2110}s_1s_2 + \dots + \Gamma_{2003}\varepsilon^3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を行い, 式(23)を次式のように

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (25)$$

と変換する。ここで,

$$\begin{aligned} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) &= \kappa_{1200}s_1^2 + \kappa_{1110}s_1s_2 + \cdots + \kappa_{1003}\varepsilon^3 \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) &= \kappa_{2200}s_1^2 + \kappa_{2110}s_1s_2 + \cdots + \kappa_{2003}\varepsilon^3 \end{aligned} \quad (26)$$

である。

できるだけ非線形項 n_1, n_2 が少なくなるような座標変換式を求める。まず、非線形座標変換式(24)を時間微分すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s_1} & \frac{\partial h_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s_1} & \frac{\partial h_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \right) \quad (27)$$

となる。式(27)に式(25)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s_1} & \frac{\partial h_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s_1} & \frac{\partial h_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ n_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

と表される。

一方、式(23)に座標変換式(24)を代入すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda_{1i} & 0 \\ 0 & -i\lambda_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 + h_1(s_1, s_2, \varepsilon) \\ s_2 + h_2(s_1, s_2, \varepsilon) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1''(r_1, r_2, \varepsilon) \\ N_2''(r_1, r_2, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (29)$$

となる。

ここで、式(28)と式(29)を等置し、 s_1, s_2, ε に関する各べき係数を比較することで、 κ と Γ を関連付ける。ただし、4次以上の項は無視して考える。

これらの係数を式(24)に代入することで、最終的に標準形は

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_1 &= i\lambda_{1i}s_1 + \kappa_{1101}s_1\varepsilon + \kappa_{1210}s_1^2s_2 \\ \dot{s}_2 &= -i\lambda_{1i}s_2 + \kappa_{2011}s_2\varepsilon + \kappa_{2120}s_1s_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と表現される。

さらに s_1, s_2 を極座標表示 $s_1 = re^{i\theta}, s_2 = re^{-i\theta}$ で表すと、式(30)は

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = i\lambda_{1i}re^{i\theta} + \kappa_{1101}\varepsilon re^{i\theta} + \kappa_{1210}r^3e^{i\theta} \\ \dot{s}_2 &= \dot{r}e^{-i\theta} - ir\dot{\theta}e^{-i\theta} = -i\lambda_{1i}re^{-i\theta} + \kappa_{2011}\varepsilon re^{-i\theta} + \kappa_{2120}s_1r^3e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。軌道を考察する際には s_1 と s_2 のうち片方だけを用いればよいので式(31)の s_1 のみに着目し、これを実部と虚部に分けると

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \kappa_{1101r}\varepsilon r + \kappa_{1210r}r^3 \\ \dot{\theta} &= \lambda_{1i} + \kappa_{1101i}\varepsilon + \kappa_{1210i}r^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。ただし、 $\kappa_{1101} = \kappa_{1101r} + i\kappa_{1101i}$, $\kappa_{1210} = \kappa_{1210r} + i\kappa_{1210i}$ とする。式(32)はそれぞれリミットサイクルの振幅と位相の時間変化を表しており、不動点は $\dot{r} = 0$ すなわち

$$0 = \kappa_{1101r}\varepsilon r + \kappa_{1210r}r^3 \quad (33)$$

を満たす解である。自明な解 $r_f = 0$ に加え、レール／車輪間に作用する非線形力の影響により非自明解が発生し、振幅は

$$r_f = \sqrt{-\frac{\kappa_{1101r}}{\kappa_{1210r}} \varepsilon} \quad (34)$$

となる。

3. 解析結果

式(34)を用いて設計パラメータを変化させた場合の蛇行動振幅を検討する。式(34)より、蛇行動振幅 r_f が存在するのは r_f が実数であるときのみであるので、 $\kappa_{1101r}/\kappa_{1210r} > 0$ ならば r_f が実数となるのは $\varepsilon < 0$ の時であり、これは亜臨界ホップ分岐である。一方、 $\kappa_{1101r}/\kappa_{1210r} < 0$ ならば r_f が実数となるのは $\varepsilon > 0$ の時であり、これは超臨界ホップ分岐である。台車の支持ばね剛性を 1×10^6 N/m から 1×10^9 まで変化させたときの蛇行動振幅を図4に示す。この結果より、 1×10^6 N/m から 1×10^9 N/m まで変化させても蛇行動振幅は速度変動 $\varepsilon < 0$ のときのみ生じ、これは亜臨界ホップ分岐であることを示している。このことから、支持ばね剛性を変化させた時には蛇行動限界速度は変化しても亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化することはないことがわかる。

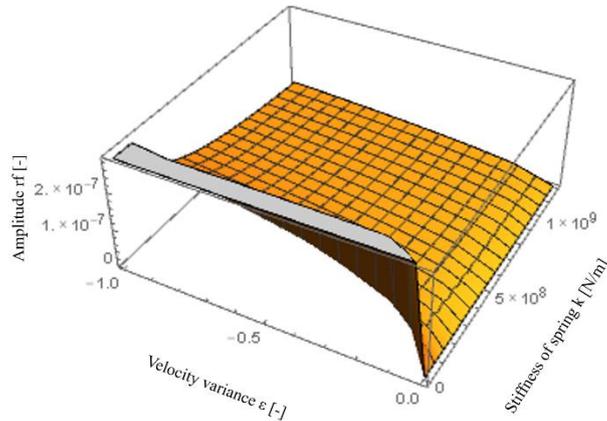


図4 支持ばね剛性と速度と振幅の関係

7. 結 言

本報では、設計パラメータを調整することによって、蛇行動において亜臨界ホップ分岐の特性がどのように変化するか検討した。まず、一軸台車を対象にして非線形項を含む運動方程式を用い、中心多様体理論により、力学系を平衡点の分岐に関するモードのみに低次元化した。次に中心多様体理論を用いた非線形座標変換により、分岐現象を支配する標準形の微分方程式を導出し、リミットサイクル軌道の解析式を導出した。その結果、支持ばね剛性を変化させた時には蛇行動限界速度は変化しても亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化することはないことがわかった。

謝 辞

本研究はオートレースの補助（28-154）を受けて実施しました。

文 献

- (1) 日本機械学会，“鉄道車両のダイナミクス 最新の台車テクノロジー”，電気車研究会（1994）。

- (2) Matsudaira, T., Matsui, N., Arai, S. and Yokose, K., "Problems on Hunting of Railway Vehicle on Test Stand", Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.91, No.3 (1969), pp.879-885.
- (3) Wickens, A.H., "The dynamic stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels", International Journal of Solids and Structures, Vol.1, No.3 (1965), pp.319-341.
- (4) 坂本 東男, 山本 三幸, "台車振動に及ぼすクリープ力非線形特性の影響", 日本機械学会論文集 C 編, Vol.52, No.473 (1986), pp.302-309.
- (5) 横瀬 景司, 五十嵐 光男, 高柳 次郎, "クリープ力の非線形特性を考慮した台車だ行動に関する基礎的考察", 日本機械学会論文集 C 編, Vol.51, No.466 (1985), pp.1198-1208.
- (6) 横瀬 景司, 佐渡 達朗, 小林 且洋, 藤家 正子, "Krylov-Bogoliubov 法を適用した非線形だ行動の一解法", 日本機械学会論文集 C 編, Vol.56, No.531 (1990), pp.2893-2898.
- (7) Yabuno, H., Okamoto, T. and Aoshima, N., "Effect of Lateral Linear Stiffness on Nonlinear Characteristics of Hunting Motion of a Railway Wheelset", Meccanica, Vol. 37, No. 6 (2002), pp. 555-568
- (8) G. Lorant, G. and Stepan, G., "The Role of Non-Linearities in the Dynamics of a Single Railway Wheelset", Machine Vibration, Vol. 5 (1996), pp.18-26
- (9) Froment, O., Aubry, D. and Castel, L., "Analysis of the Stability of Nonlinear Railways Dynamics", Computational Mechanics (1998), pp.1-9.
- (10) Wagner, U., "Nonlinear dynamic behaviour of a railway wheelset", Vehicle System Dynamics, Vol. 47, No. 5 (2009), pp.627-640.
- (11) Polach, O. and Kaiser, I., "Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models", Transactions of the ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.7 (2012), pp.041005-1 - 041005-8.
- (12) Wu, X and Chi, M., "Parameters Study of Hopf Bifurcation in Railway Vehicle System", Transactions of ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.10, No.3 (2015), pp.031012-1 – 031012-10.
- (13) 加野裕士, 井上剛志, "分岐解析のための部分構造合成法を用いたジャーナル軸受・ロータ系の低次元化", the 16th SICE System Integration Division Annual Conference (2015).
- (14) 藪野 浩司, "工学のための非線形解析入門 システムのダイナミクスを正しく理解するために", サイエンス社, (2004).
- (15) Popp, K., "Parametric Excitation of a Wheelset", ZAMM Z. angew. Math. Mech., Vol. 77, (1997), pp. 269-270.